

АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ СОЦИАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ»

С. Г. Афанасьев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебное пособие

Ставрополь

2020

УДК 510.6 (075.8)
ББК 22.12 я73
А 94

Автор:

Афанасьев Сергей Георгиевич — старший преподаватель,
кафедра прикладной информатики и математики АНО ВО
«Северо-Кавказский социальный институт»

Афанасьев, С. Г.

А 94 Математическая логика: учебное пособие / С.Г. Афанасьев — Ставрополь: АНО ВО СКСИ, 2020. — 84с. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-6044711-6-6

Учебное пособие написано с учетом современных требований к подготовке специалистов высших учебных заведений, на базе лекций, прочитанных автором для студентов Северо-Кавказского социального института. В нем приводятся необходимые теоретические сведения и примеры, поясняющие их. Наряду со словесно-повествовательным характером изложения материала используется условная символика математического языка.

Подготовлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования.

Предназначено для студентов вузов, образовательная программа которых содержит дисциплины, включающие в себя математическую логику, элементы математической логики, элементы высшей математики. Издание может быть использовано как в аудиторной учебной работе, так и для самостоятельной подготовки студентов.

Учебное электронное издание сетевого распространения

© Афанасьев С.Г.

© Северо-Кавказский социальный институт

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА.....	6
1. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ.....	7
1.1. Основные понятия	7
1.2. Операции над высказываниями.....	8
1.3. Понятие формулы алгебры высказываний	10
1.4. Классификация формул алгебры высказываний.....	11
1.5. Законы логики.....	12
1.6. Двойственные формулы.....	14
1.7. Метод математической индукции.....	15
1.8. Булевы функции.....	17
1.9. Алгебра Буля.....	19
1.10. Релейно-контактные схемы.....	20
1.11. ДНФ и КНФ.....	23
1.12. Критерий тождественной истинности формулы АВ.....	24
1.13. СКНФ и СДНФ	26
1.14. Способы построения совершенных форм.....	27
1.15. Полином Жегалкина.....	29
1.16. Проблема разрешимости формул АВ.....	32
1.17. Нечёткая логика булевых функций.....	33
1.18. Полные системы связей.....	44
1.19. Одноэлементные П.С.С.....	45
2. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ.....	48
2.1. Формальные и содержательные теории.....	48
2.2. Язык, понятие формулы и аксиомы ИВ.....	48
2.3. Производные правила вывода.....	50
2.4. Правила выводимости гипотез.....	51
2.5. Некоторые примеры доказательств, использующие теорему дедукции. Теорема о выводимости.....	52
2.6. Проблемы аксиоматического ИВ.....	53
3. АЛГЕБРА ПРЕДИКАТОВ.....	56
3.1. Высказывательные формы Предикаты, основные определения.....	56
3.2. Область истинности предикатов.....	57
3.3. Логические операции над предикатами.....	59
3.4. Таблица истинности логических операций над предикатами.....	60
3.5. Кванторные операции.....	60
3.6. Кванторные операции с n-местными предикатами.....	61
3.7. Понятие формулы АП.....	62
3.8. Теоремы об областях истинности логических операций над предикатами...	62
3.9. Свойства кванторных операций над предикатами.....	66
3.10. Классификация формул АП.....	69
3.11. Нормальные формулы АП.....	70
3.12. Проблема разрешимости для формул АП.....	72
3.13. Тезис Чёрча.....	74

3.15. Виды теорем.....	76
3.16. Метод доказательства «от противного».....	78
3.17. Выражение кванторных операций через логические операции.....	78
4. РАССУЖДЕНИЯ.....	79
4.1. Рассуждения. Критерий правильности рассуждений.....	79
4.2. Правило вывода.....	80
ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ.....	82
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	84

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано с учетом современных требований к подготовке специалистов высших учебных заведений, на базе лекций, прочитанных автором для студентов Северо-Кавказского социального института. В нем приводятся необходимые теоретические сведения и примеры, поясняющие их. Наряду, со словесно-повествовательным характером изложения материала используется условная символика математического языка. Предназначено для студентов вузов, образовательная программа которых содержит дисциплины, включающие в себя математическую логику, элементы математической логики, элементы высшей математики.

Учебное пособие обеспечивает математическую базу, необходимую для успешного усвоения студентами других разделов математического анализа, способствует формированию умений и навыков, необходимых для практического применения математических идей и методов, для анализа и моделирования сложных систем, процессов, явлений, для поиска оптимальных решений и выбора наилучших способов их реализации.

Учебное пособие знакомит читателя с основными положениями и канонами математического мышления, возможностями математических методов исследования, методами математического моделирования, развития общей математической грамотности его как будущего специалиста.

Учебное пособие способствует построению системы знаний и умений в области математической логики, необходимых для применения в будущей профессиональной деятельности, при изучении смежных дисциплин, проведении научных исследований.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Формальная логика — одна из древнейших наук. Отдельные фрагменты ее начали разрабатываться в VI в. до нашей эры в Древней Греции и Индии. Основателем этой науки считается древнегреческий ученый Аристотель, который обстоятельно систематизировал логические формы и правила мышления, и тем самым заложил начала логики. Логика, основанная на учении Аристотеля, существовала до начала XX в., после чего в ней произошла своеобразная научная революция, связанная с широким применением методов так называемой символической, или математической логики. Идеи о возможности сведения рассуждений к вычислениям — были высказаны еще немецким ученым Г. В. Лейбницем в XVII в.. Однако только к началу XX столетия математическая логика (то есть логика, развиваемая математическим методом) оформилась в качестве самостоятельной дисциплины. Характерным для этой дисциплины является использование формальных языков с точным синтаксисом и четкой семантикой, однозначно определяющими понимание формул. Современная математическая логика — это та же самая логика Аристотеля, но только громоздкие словесные выводы заменены в ней математической символикой. Эта дисциплина изучает вопросы применения математических методов для решения логических задач и построения логических схем, которые лежат в основе работы любого компьютера. Для построения основных разделов современной математической логики существуют два подхода (языка), образующих два варианта формальной логики: алгебру логики и логические исчисления. Суждения в математической логике называют высказываниями или логическими выражениями. Математическая логика включает два основных раздела: логику высказываний (или пропозициональную логику) и охватывающую ее логику предикатов.

1. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ.

1.1. Основные понятия.

Понятие **высказывания** является одним из первоначальных неопределяемых понятий в математике.

Под **высказыванием** понимают повествовательные предложения, относительно которых имеет смысл утверждать, что оно является истинным или ложным.

Пример: $2+2=4$, Москва столица нашей Родины.

Любому высказыванию можно поставить в соответствие значение истинности: «*истина*», «*ложь*».

Высказывания бывают:

1. **Простыми.** В них нельзя выделить часть, которая сама является высказыванием и не совпадает по смыслу с исходными высказываниями.
2. **Составными** – в противном случае.
3. **Конкретные.** В виде словесной формы.
4. **Переменные.** Высказывания обозначают малыми буквами латинского алфавита.

Факт истинности или ложности высказывания записывают, соответственно, единицей или нулём:

$a=1$ – истина

$b=0$ – ложь

Для конструирования составных высказываний из простых высказываний используют так называемые логические связки:

- 1) не; неверно, что; $\neg$; $|$
- 2) и; а; но; $\wedge$
- 3) или; либо; $\vee$
- 4) если, то; $\rightarrow$
- 5) тогда и только тогда, когда; $\Leftrightarrow$; $\sim$

1.2. Операции над высказываниями.

1. Отрицание.

Отрицанием высказывания a называется новое высказывание $\bar{a}$ и читаемое не a , которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание a ложно, и наоборот.

a	$\bar{a}$
1	0
0	1

Такая запись носит название таблицы истинности.

2. Конъюнкция.

Конъюнкцией двух высказываний a и b называется новое высказывание, обозначаемое $a \wedge b$, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны и ложно во всех остальных случаях.

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

3. Дизъюнкция.

Дизъюнкцией двух высказываний a и b называется новое высказывание, обозначаемое $a \vee b$, которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны и истинно во всех остальных случаях.

a	b	$a \vee b$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

4. Импликация.

Импликацией двух высказываний a и b называется новое высказывание, обозначаемое $a \rightarrow b$, которое ложно лишь в случае, когда первое

высказывание (условие) $a = 1$ истинно, а второе высказывание (заключение) $b = 0$ ложно.

a	b	$a \rightarrow b$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

5. Эквиваленция.

Эквиваленцией двух высказываний a и b называется новое высказывание, обозначаемое $a \sim b, a \leftrightarrow b, a \Leftrightarrow b$, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания принимают одинаковые значения истинности.

a	b	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Общая таблица истинности для операций над высказываниями

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1

1.3. Понятие формулы алгебры высказываний.

Под формулой в логике высказываний будем понимать:

1. любое конкретное или любое переменное высказывание;
2. если a и b формулы, то формулами также являются соответствующие логические операции над высказываниями;
3. других формул, кроме указанных в первых двух пунктах нет.

Замечание: формулы из пункта 1 называются элементарными, для определения порядка выполнения логических операций будут использоваться скобки, при их отсутствии порядок выполнения логических операций над высказываниями следующий:

отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция.

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Leftrightarrow$$

Формулы будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита:

$F(a, b, c)$ - обозначает, что формула F зависит от трёх высказывательных переменных.

В записи формулы входят логические переменные

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, x_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, n},$$

принимающие значение либо ноль, либо единица, то и формула $G(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow G \in \{0, 1\}$ принимает значение ноль или единица.

Логической возможностью формулы называют произвольный набор значений истинности для высказывательных переменных, входящих в запись этой формулы.

Для формулы от одной переменной $F(x)$ имеется две логические возможности:

Формула	Логические возможности
$F(x)$	2
$F(x, y)$	$4=2^2$
$F(x, y, z)$	$8=2^3$
...	...
$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$	2^n

Под таблицей истинности формулы будем понимать перечень всех логических возможностей формулы с указанием значений истинности самой формулы в каждой логической возможности.

Общей логической возможностью двух формул будем называть перечень всевозможных значений истинности для переменных, входящих в запись хотя бы одной из этих формул.

Пример: общей логической возможностью двух формул $G(a, b, x, y, z)$ и $F(a, b, c)$ будет являться конкретный набор значений истинности для переменных $\{a, b, c, x, y, z\}$.

Две формулы логики высказываний называются равносильными, если в каждой их общей логической возможности они принимают одинаковые значения истинности. $F \equiv G$

1.4. Классификация формул алгебры высказываний.

Все формулы можно разбить на три класса:

1. Тавтологии
2. Противоречия
3. Выполнимые

Формула называется **тавтологией** или **тождественно истинной**, если она истинна в каждой своей логической возможности:

$$F \equiv 1$$

Формула называется **противоречием** или **тождественно ложной**, если она ложна в каждой своей логической возможности:

$$F = 0$$

Формула называется выполнимой, если она истинна, хотя бы в одной своей логической возможности, но не является тавтологией.

Теорема о тавтологии

Эквиваленция двух формул является тавтологией, тогда и только тогда эти формулы равносильны.

$$F \sim G \equiv 1 \Leftrightarrow F \equiv G$$

Доказательство:

Необходимость

Пусть эквиваленция формул является тавтологией, тогда данная формула является истиной в каждой своей логической возможности, а по определению эквиваленции следует, что эти формулы принимают одинаковые значения истинности в каждой своей логической возможности, тогда по определению эти формулы равносильны.

Достаточность доказывается в обратном порядке.

Теорема (об отношении равносильности)

Отношение равносильности является отношением эквивалентности.

Доказательство:

Для доказательства необходимо показать:

1) рефлексивность

$$\forall F: F \equiv F$$

2) симметричность

$$\forall F, G : F \equiv G \Rightarrow G \equiv F$$

3) транзитивность

$$\forall F, G, H : F \equiv G \wedge \Rightarrow G \equiv H \Rightarrow F \equiv H$$

1.5. Законы логики или основные равносильности алгебры высказываний.

Пусть A, B, C – произвольные формулы алгебры высказываний, тогда имеют место следующие равносильности:

1) Закон двойного отрицания

$$\bar{\bar{A}} \equiv A$$

2) Законы идемпотентности

$$A \wedge A \equiv A, \quad A \vee A \equiv A$$

3) Законы коммутативности

$$A \wedge B \equiv B \wedge A, \quad A \vee B \equiv B \vee A$$

4) Законы ассоциативности

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C, \quad A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$

5) Законы дистрибутивности

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

6) Законы поглощения

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A$$

$$A \vee (A \wedge B) \equiv A$$

7) Законы де Моргана

$$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}, \quad \overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$$

Замечание: законы 2–7 не меняются при замене операции конъюнкции на операцию дизъюнкции, поэтому указанные операции называются двойственными или дуальными.

8) Закон исключения импликации

$$A \rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$$

9) Закон исключения эквиваленции

$$A \sim B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

10) Закон контрапозиции

$$A \rightarrow B \equiv \overline{B} \rightarrow \overline{A}$$

11) Законы исключённого третьего и противоречия

$$A \vee \overline{A} \equiv 1, \quad A \wedge \overline{A} \equiv 0$$

12) Законы нуля и единицы

$$A \wedge 0 \equiv 0$$

$$A \vee 0 \equiv A$$

$$A \wedge 1 \equiv A$$

$$A \vee 1 \equiv 1$$

$$\overline{0} \equiv 1$$

$$\overline{1} \equiv 0$$

Справедливость указанных законов можно доказать используя таблицу истинности для левой и правой частей равносильности.

Таблицей истинности будем называть перечень всех логических возможностей формулы с указанными на ней значениями истинности самой формулы.

Доказать справедливость 5 закона:

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Сравнивая выделенные столбцы (5 и 8) убеждаемся, что формулы равносильны.

Доказать справедливость закона:

$$A \vee (A \wedge B) \equiv A$$

A	B	$A \wedge B$	$A \vee (A \wedge B)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

1.6. Двойственные формулы.

Согласно законам исключения эквиваленции и импликации, любую формулу алгебры высказываний можно представить в виде формулы, содержащей лишь операции: отрицания, конъюнкции, дизъюнкции. При этом, используя законы де Моргана, можно добиться того, чтобы отрицание относилось лишь к элементарным частям рассматриваемой формулы.

Пусть формула содержит лишь три логические операции: **отрицания**, **конъюнкции**, **дизъюнкции**, причём отрицание относится к переменным

высказываниям, тогда двойственной к этой формуле будем называть формулу, которая получается из исходной заменой в ней всех логических операций на двойственные (дуальные), при этом двойственной к отрицанию является она сама.

Пример:

Если исходная формула F , то двойственная ей формула F^*

$$F = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \vee \bar{y})$$

$$F^* = (\bar{x} \vee y) \wedge (x \wedge \bar{y})$$

Теорема:

Пусть задана формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и содержит лишь три логические операции: отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, тогда верна следующая равносильность:

$$\overline{F(x_1, x_2, \dots, x_n)} = F^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

Доказывается теорема методом математической индукции.

Теорема: Критерий двойственности формулы

$$F \equiv G \Leftrightarrow F^* \equiv G^*$$

Доказательство:

Предположим, что $F \equiv F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $G \equiv G(x_1, x_2, \dots, x_n)$, тогда

$$F \equiv G \Leftrightarrow F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv G(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{F(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv \overline{G(x_1, x_2, \dots, x_n)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \equiv G^*(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

Если переименовать переменные $\bar{x}_i$ на y_i , тогда можно записать:

$$F^*(y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv G^*(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$F^* \equiv G^*$$

1.7. Метод математической индукции.

Индукция (лат. *inductio* – наведение) – переход от частного к общему; дедукция (лат. *deductio* – вывод) – переход от общего к частному.

Метод математической индукции применяется в различных областях математики (арифметике, алгебре и теории чисел, в математическом анализе, геометрии и т.д.) для доказательства формул, неравенств, теорем и, в общем случае, для доказательства истинности некоторого утверждения, заданного на множестве натуральных чисел, начиная с некоторого номера $n \in N, n > n_0$.

Теорема: (принцип математической индукции). Одноместное утверждение $P(n)$ является истинным для всех $n \in N$, если выполнены следующие два условия:

$$P(n) \equiv 1 \quad \forall n \in N$$

1. Базис индукции

Утверждение $P(1) \equiv 1$ истинно для $n = 1$.

2. Индуктивный переход

а) индуктивное предположение:

$$P(n) \equiv 1, n > 1$$

б) шаг индукции:

Доказывается истинность утверждения для $(n + 1)$

$$P(n + 1) \equiv 1$$

Тогда по принципу полной математической индукции утверждение истинно на всём множестве натуральных чисел.

$$P(n) \equiv 1 \quad \forall n \in N$$

Замечание: Утверждение может быть истинным в целом ряде частных случаев и в то же время ложным в общем случае.

1.8. Булевы функции.

Историческая справка: Первая работа Дж. Буля по алгебре логики появилась в 1847 г., а окончательный вариант в 1854 г. Дж. Буль.

До широкого применения математической логики прошло достаточно много времени, хотя еще в 1910 г. П. Эренфест обратил внимание на возможность применения математической логики для решения прикладных вопросов релейно–контактных схем.

В 1938 г. К. Шенноном и В.И. Шестаковым была сделана первая попытка описать логические схемы на реле в терминах алгебры логики. В 1950 г. эта идея была оформлена в работе М.А. Гаврилова как теория логического проектирования релейно–контактных схем. В дальнейшем многие отечественные и зарубежные ученые проводили исследования в области теории и технологии проектирования логических схем.

Сегодня булева алгебра вполне сформировавшийся раздел дискретной математики.

Булевы функции.

Пусть формула не содержит операции импликацию и эквиваленцию.

Булевой функцией будем называть, в узком смысле, формулу алгебраического высказывания, содержащую лишь операции: отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию.

n – местной Булевой функцией, в широком смысле, будем называть формулу алгебры высказываний от n – переменных или n – местную произвольную функцию, область определения которой является n -ое декартово произведение множества $\{0, 1\}$

$$\{0, 1\}^n = \underbrace{\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}}_{n \text{ раз}}$$

Булевой функции от одной переменной можно задать четыре значения:

$$f(x) \equiv \begin{cases} x \\ \bar{x} \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$4 = 2^{2^1}$$

Таблица истинности булевой функции от одной переменной.

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	0	1
1	1	0	0	1

Булева функция от двух переменных $f(x, y)$ может принимать шестнадцать значений: $16 = 2^4 = 2^{2^2}$

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	1														
0	1	0	1														
1	0	0	1														
1	1	0	1														

$$f_1(x, y) \equiv 0$$

$$f_2(x, y) \equiv 1$$

$$f_3(x, y) \equiv x \wedge y$$

$$f_4(x, y) \equiv \overline{x \rightarrow y}$$

$$f_5(x, y) \equiv \overline{y \rightarrow x}$$

$$f_6(x, y) \equiv \overline{x \vee y} \equiv x \downarrow y \quad \text{— стрелка Пирса}$$

$$f_7(x, y) \equiv x$$

$$f_8(x, y) \equiv y$$

$$f_9(x, y) \equiv \overline{y}$$

$$f_{10}(x, y) \equiv \overline{x}$$

$$f_{11}(x, y) \equiv \overline{x \sim y} \quad \text{— операция сложение по модулю два}$$

$$f_{12}(x, y) \equiv x \sim y$$

$$f_{13}(x, y) \equiv x \vee y$$

$$f_{14}(x, y) \equiv y \rightarrow x$$

$$f_{15}(x, y) \equiv x \rightarrow y$$

$$f_{16}(x, y) \equiv \overline{x \wedge y} \equiv x \overline{\wedge} y \quad \text{— операция Шеффера}$$

Аналогично, можно показать, что булева функция от n – переменных $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимает 2^{2^n} значений.

1.9. Алгебра Буля.

Пусть дано множество произвольной природы, элементы этого множества обозначим малыми буквами латинского алфавита с индексами:

$$M = \{a, b, c, \dots\}$$

Предположим, что на этом множестве заданы три логические операции: $\neg, \star, \diamond$

$\neg$ – унарная

$\star, \diamond$ – бинарные

Эти операции обладают свойствами:

1) свойство двойной черты $\overline{\overline{a}} = a$

2) идемпотентность бинарной операции $a \star a = a, a \diamond a = a$

3) коммутативность $a \star b = b \star a, a \diamond b = b \diamond a$

4) ассоциативность

$$(a \star b) \star c = a \star (b \star c), \quad (a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$$

5) дистрибутивность одной операции относительно другой

$$a \star (b \diamond c) = (a \star b) \diamond (a \star c), \quad a \diamond (b \star c) = (a \diamond b) \star (a \diamond c)$$

6) свойство поглощения

$$a \star (a \diamond b) = a, \quad a \diamond (a \star b) = a$$

7) свойство де Моргана

$$\overline{a \star b} \equiv \overline{a} \diamond \overline{b}, \quad \overline{a \diamond b} \equiv \overline{a} \star \overline{b}$$

В этом случае множество M с указанными операциями называется булевой алгеброй.

Пример: булевой алгеброй являются:

- алгебра высказываний с тремя операциями: $\neg, \wedge, \vee$

- алгебра множеств с операциями: $\cup, \cap, \setminus$

1.10. Применение булевых функций к релейно-контактным схемам. (РКС)

Булевы функции широко применяются при описании работы дискретных управляющих систем (контактных схем, схем из функциональных элементов, логических сетей и т. д.), при исследовании некоторых электрических цепей, так называемых релейно-контактных схем.

Под *релейно-контактной схемой* (РКС) понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов.

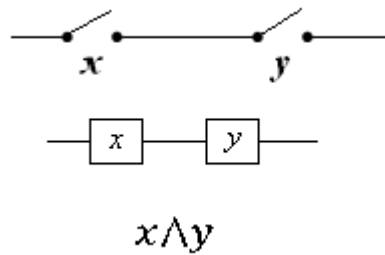
Оно может быть предназначено, например, для соединения (или разъединения) полюсов источника тока с некоторым потребителем. Контакты РКС могут быть двух типов: *замыкающие* и *размыкающие*. Каждый контакт подключён к некоторому реле (переключателю). К одному реле может быть подключено несколько контактов, как замыкающих, так и размыкающих.

Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменная x_i , которая принимает значение истины, когда реле включено, и принимает значение ложь при отключении реле. На чертеже все замыкающие контакты, подключённые к реле x , обозначаются тем же символом x , а все размыкающие контакты, подключённые к реле, обозначаются отрицанием $\bar{x}$.

Каждая РКС, в которой занято n независимых реле (контактов в ней может быть n или больше), определяет некоторую булеву функцию от n аргументов, которые соответствуют тем состояниям реле, при которых данная схема проводит электрический ток. Такая булева функция называется $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *функцией проводимости* данной РКС.

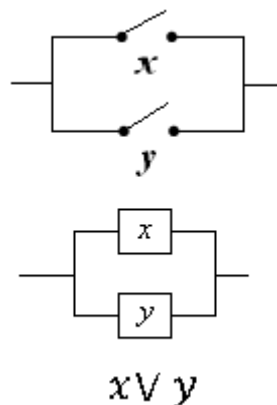
Рассмотрим некоторые релейно-контактные схемы и найдём их функции проводимости.

Первая схема состоит из двух последовательно соединённых контактов x и y , то есть контактов, связанных с двумя независимыми реле x и y , каждое из которых срабатывает независимо от другого.



Данная схема проводит электрический ток тогда и только тогда, когда оба контакта x и y замкнуты, то есть только тогда, когда обе переменные x и y принимают значение 1 (истинна). Булева функция от двух аргументов x и y , удовлетворяющая такому условию – конъюнкция $x \wedge y$.

Вторая РКС состоит из двух параллельно соединённых контактов x и y .



Эта схема проводит электрический ток в том и только том случае, когда, по меньшей мере, один из контактов x или y замкнут, то есть лишь в случае, когда хотя бы одна из булевых переменных x или y принимает значение **1** (истинна). Булева функция от двух аргументов, удовлетворяющая данному условию – дизъюнкция $x \vee y$.

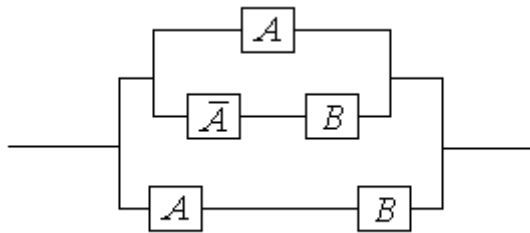
При решении задач используется так называемый анализ и синтез РКС.

1. Анализ РКС заключается в следующем.

Для данной схемы составляется соответствующая формула, которая на основании законов логики упрощается и для неё строится новая, более простая схема, обладающая теми же электрическими свойствами проводимости, что и исходная.

Пример:

Дана схема, требуется упростить данную РКС.

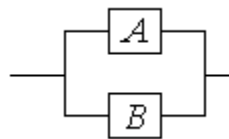


Решение.

Запишем соответствующую ей формулу и преобразуем её равносильными преобразованиями.

$$\begin{aligned}(A \vee (\bar{A} \wedge B)) \vee (A \wedge B) &\equiv A \vee (\bar{A} \wedge B) \vee (A \wedge B) \equiv A \vee (\bar{A} \wedge B) \equiv \\ &\equiv (A \vee \bar{A}) \wedge (A \vee B) \equiv 1 \wedge (A \vee B) \equiv A \vee B\end{aligned}$$

Таким образом, исходная схема равносильна следующей схеме:



2. **Синтез схем** заключается в построении схем с заданными электрическими свойствами. На основании заданных электрических свойств - строится формула алгебры высказываний, а по ней соответствующая схема.

Пример:

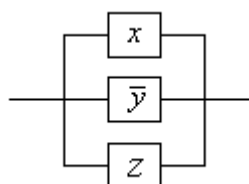
Составить РКС для формулы: $(\bar{x} \wedge y) \rightarrow (z \vee x)$.

Решение.

Упростим данную формулу с помощью равносильных преобразований:

$$(\bar{x} \wedge y) \rightarrow (z \vee x) \equiv \overline{\bar{x} \wedge y} \vee z \vee x \equiv x \vee \bar{y} \vee z \vee x \equiv x \vee \bar{y} \vee z$$

Тогда РКС для данной формулы имеет вид:



1.11. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы.

Определение 1 Элементарной конъюнкцией от n - переменных будем называть конъюнкцию этих переменных или их отрицание и обозначать:

$$x_1^{\delta_1} \wedge x_2^{\delta_2} \wedge x_3^{\delta_3} \wedge \dots \wedge x_n^{\delta_n}$$
$$x_i^{\delta_i} = \begin{cases} x_i, & \delta_i = 1 \\ \bar{x}_i, & \delta_i = 0 \end{cases} \quad i = \overline{1, n}$$

Определение 2 Элементарной дизъюнкцией от n - переменных будем называть дизъюнкцию этих переменных или их отрицание и обозначать:

$$x_1^{\delta_1} \vee x_2^{\delta_2} \vee x_3^{\delta_3} \vee \dots \vee x_n^{\delta_n}$$

Определение (ДНФ) Дизъюнктивной нормальной формой формулы алгебры высказываний будем называть равносильную ей формулу, представляющую собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Определение (КНФ) Конъюнктивной нормальной формой формулы алгебры высказываний называется равносильная ей формула, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

Пример:

Найти ДНФ и КНФ формулы: $F \equiv (x \sim y) \rightarrow x$

Решение.

$$\begin{aligned} F \equiv (x \sim y) \rightarrow x &\equiv ((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)) \rightarrow x \equiv \overline{((\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x))} \vee x \equiv \\ &\equiv ((\bar{\bar{x}} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{y} \wedge \bar{x})) \vee x \equiv (x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{x}) \vee x \equiv \text{ДНФ } F \end{aligned}$$

$$F \equiv (x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{x}) \vee x \equiv ((x \wedge \bar{y}) \vee x) \vee (y \wedge \bar{x}) \equiv x \vee (y \wedge \bar{x}) \equiv \text{ДНФ } F$$

$$F \equiv x \vee (y \wedge \bar{x}) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{x}) \equiv \text{КНФ } F \equiv (x \vee y) \wedge 1 \equiv (x \vee y) \equiv \text{КНФ } F$$

Заметим, что КНФ и ДНФ у формулы может быть бесконечное множество.

Теорема: Всякую формулу алгебры высказываний можно привести к её КНФ или ДНФ.

Доказательство:

Для доказательства теоремы предложим алгоритм получения ДНФ (КНФ).

- 1) Используя законы исключения эквиваленции и импликации, добьёмся того, чтобы в формуле присутствовали лишь операции: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция.
- 2) Если формула содержит отрицание над некоторой частью формулы, то используя законы де Моргана, добиваются того, чтобы операция отрицания относилась лишь к высказывательным переменным.
- 3) Используя законы дистрибутивности, преобразовать формулы к виду ДНФ, либо КНФ.

1.12. Критерий тождественной истинности (тождественной ложности) формулы алгебры высказываний.

Теорема 1:

Элементарная дизъюнкция от n – переменных тождественно истинна тогда и только тогда, когда содержит некоторую переменную, одновременно с её отрицанием.

Доказательство: необходимость

Пусть элементарная дизъюнкция от n – переменных тождественно истинна: $\text{ЭД}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 1$

Предположим, что при этом все элементарные дизъюнкции не содержат ни одной переменной одновременно с её отрицанием, тогда придадим всем переменным, входящие в элементарные дизъюнкции без знака отрицания, значение ложь, а переменным, входящим в элементарные дизъюнкции со знаком отрицания, – значение истины, в результате получим

дизъюнкцию нулей, которая ложна. Следовательно, получили противоречие с нашим предположением.

достаточность

Пусть элементарная дизъюнкция содержит переменную x_i одновременно с её отрицанием $\bar{x}_i$, тогда элементарную дизъюнкцию можно представить в виде:
$$\left(x_1^{\delta_1} \vee x_2^{\delta_2} \vee \dots \vee x_{i-1}^{\delta_{i-1}}\right) \vee \underbrace{(x_i \vee \bar{x}_i)}_{\substack{||| \\ 1}} \vee \left(x_{i+1}^{\delta_{i+1}} \vee \dots \vee x_n^{\delta_n}\right) \equiv 1$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 2:

Формула алгебры высказываний тождественно истинна тогда и только тогда, когда каждая элементарная дизъюнкция, входящая в её КНФ, содержит некоторую переменную одновременно с отрицанием этой переменной.

Доказательство:

Пусть элементарная конъюнкция от n – переменных тождественно истинна: $ЭК(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \text{КНФ } ЭК(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 1 \equiv \\ & \equiv ЭД_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge ЭД_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge \dots \wedge ЭД_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 1 \Leftrightarrow \\ & ЭД_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 1, i = \overline{1, k} \Leftrightarrow \text{по теореме 1} \\ & (\text{ЭД} - \text{элементарная дизъюнкция}) \end{aligned}$$

Достаточность доказывается аналогичным образом, но при рассуждениях в обратную сторону.

Теорема 3:

Элементарная конъюнкция от n – переменных тождественно ложна тогда и только тогда, когда содержит некоторую переменную, одновременно с её отрицанием.

Доказательство:

Доказательство аналогично доказательству из теоремы 1, однако, в доказательстве необходимости всем переменным входящим в элементарные конъюнкции без знака отрицания нужно придать значение истины, а под знаком отрицания – значение ложь, и тогда так же придём к противоречию с условием теоремы.

Теорема 4:

Формула алгебры высказываний тождественно ложна тогда и только тогда, когда каждая элементарная конъюнкция, входящая в её ДНФ, содержит некоторую переменную одновременно с отрицанием этой переменной.

Доказательство:

Пусть формула алгебры высказываний тождественно ложна: $F \equiv 0 \Leftrightarrow$

$$\text{ДНФ } F \equiv F \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{ДНФ } F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0 \equiv$$

$$\equiv \exists K_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \exists K_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \dots \vee \exists K_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$\exists K_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0, i = \overline{1, k} \Leftrightarrow$ по теореме 3 элементарная конъюнкция содержит некоторую переменную одновременно с её отрицанием.

(ЭК – элементарная конъюнкция)

1.13. Совершенные конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.

Среди всего множества ДНФ и КНФ существуют единственные ДНФ и КНФ, которые называют совершенными ДНФ и КНФ.

Обозначают: СДНФ и СКНФ.

СДНФ формулы будем называть ДНФ этой формулы, обладающей свойствами «совершенства».

Свойства совершенства:

1. Все элементарные конъюнкции, входящие в СДНФ, различны.
2. Ни одна из элементарных конъюнкций не содержит некоторые переменные одновременно с их отрицанием.
3. Каждая элементарная конъюнкция содержит все переменные, входящие в запись исходной формулы.
4. Ни одна из элементарных конъюнкций не содержит некоторые переменные дважды.

Аналогично можно определить СКНФ.

СКНФ формулы будем называть КНФ этой формулы, обладающей свойствами «совершенства».

Свойства совершенства СКНФ:

1. Все элементарные дизъюнкции, входящие в СКНФ, различны.
2. Ни одна из элементарных дизъюнкций не содержит некоторые переменные одновременно с их отрицанием.
3. Каждая элементарная дизъюнкция содержит все переменные, входящие в запись исходной формулы.
4. Ни одна из элементарных дизъюнкций не содержит некоторые переменные дважды.

1.14. Способы построения совершенных форм.

Существуют два способа построения совершенных форм.

Алгоритмы построения СДНФ (СКНФ):

I. С помощью таблицы истинности

СДНФ

- 1) строим таблицу истинности формулы
- 2) выделяем логические возможности формулы, в которых формула истинна

3) для выделенных логических возможностей строим истинные элементарные конъюнкции

4) беря дизъюнкцию полученных элементарных конъюнкций, находим СДНФ

СКНФ

1) строим таблицу истинности формулы

2) выделяем логические возможности формулы, в которых формула ложна

3) составим ложные элементарные дизъюнкции для выделенных логических возможностей

4) беря конъюнкцию полученных элементарных дизъюнкций, находим СКНФ

Пример:

Записать для формулы $F \equiv x \vee y \rightarrow z$ её СКНФ и СДНФ

Решение.

Составим следующую таблицу истинности:

x	y	z	$x \vee y$	F	ЭК	ЭД
0	0	0	0	1	$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$	
0	0	1	0	1	$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z$	
0	1	0	1	0		$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$
0	1	1	1	1	$\bar{x} \wedge y \wedge z$	
1	0	0	1	0		$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$
1	0	1	1	1	$x \wedge \bar{y} \wedge z$	
1	1	0	1	0		$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$
1	1	1	1	1	$x \wedge y \wedge z$	

Выпишем СДНФ и СКНФ формулы:

$$F \equiv \text{СДНФ } F \equiv (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

$$F \equiv \text{СКНФ } F \equiv (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$$

Заметим, что согласно алгоритму построения, сама формула и её СДНФ, и СКНФ равносильны, так как принимают одинаковые значения истинности в каждой логической возможности.

II. Аналитический способ построения (на конкретном примере)

Рассмотрим некоторую формулу:

$$F \equiv (x \rightarrow y) \wedge z \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge z - \text{КНФ}$$

$$\begin{aligned} \text{КНФ } F(x, y, z) &\equiv (\bar{x} \vee y \vee 0) \wedge (z \vee 0) \equiv (\bar{x} \vee y \vee (z \wedge \bar{z})) \wedge (z \vee (x \wedge \bar{x})) \equiv \\ &\equiv (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee \bar{x}) \equiv \\ &\equiv (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (z \vee x \vee 0) \wedge (z \vee \bar{x} \vee 0) \equiv \\ &\equiv (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (z \vee x \vee (y \wedge \bar{y})) \wedge (z \vee \bar{x} \vee (y \wedge \bar{y})) \equiv \\ &\equiv (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (z \vee x \vee y) \wedge (z \vee x \vee \bar{y}) \wedge (z \vee \bar{x} \vee y) \wedge (z \vee \bar{x} \vee \bar{y}) \equiv \\ &\equiv (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (z \vee x \vee y) \wedge (z \vee x \vee \bar{y}) \wedge (z \vee \bar{x} \vee \bar{y}) - \text{СКНФ} \end{aligned}$$

Построим СДНФ для формулы:

$$F \equiv (x \rightarrow y) \wedge z \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge z \equiv (\bar{x} \wedge z) \vee (y \wedge z) - \text{ДНФ}$$

$$\begin{aligned} \text{СДНФ } F &\equiv (\bar{x} \wedge z \wedge 1) \vee (y \wedge z \wedge 1) \equiv (\bar{x} \wedge z \wedge (y \vee \bar{y})) \vee (y \wedge z \wedge (x \vee \bar{x})) \equiv \\ &\equiv (\bar{x} \wedge z \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge z \wedge x) \vee (y \wedge z \wedge \bar{x}) \equiv \\ &\equiv (\bar{x} \wedge z \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge z \wedge x) \end{aligned}$$

1.15. Полином Жегалкина.

Рассмотрим бинарную логическую операцию – сложение по модулю два (двоичное сложение), или отрицание эквиваленции. Она определяется следующим образом: **двоичное сложение** – это новое высказывание, обозначаемое $a \oplus b$, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания имеют одинаковые логические значения.

Таблица истинности:

a	b	$a \oplus b$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Свойства операции двоичное сложение:

1. Коммутативность: $x \oplus y \equiv y \oplus x$
2. Ассоциативность: $(x \oplus y) \oplus z \equiv x \oplus (y \oplus z)$
3. Дистрибутивность конъюнкции по отношению к операции двоичное сложение: $x \wedge (y \oplus z) \equiv (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$
4. Операция не идемпотентна: $x \oplus x \equiv 0$, $x \oplus x \oplus x \equiv x$

Следует отметить, что отсутствие идемпотентности распространяется на сумму любого чётного (нечётного) числа слагаемых.

Рассмотрим использование данной операции в вопросе представления булевой функции единственным образом, наряду с совершенными формулами.

Определение Полиномом (многочленом) Жегалкина от n – переменных называется функция:

$$P \equiv \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \dots \oplus \alpha_n x_n \oplus \alpha_{1,2} x_1 x_2 \oplus \dots \oplus \alpha_{n-1,n} x_{n-1} x_n \oplus \dots \oplus \alpha_{1,2,\dots,n} x_1 x_2 \dots x_n$$

Теорема: Любая функция n – переменных может быть представлена полиномом Жегалкина и это представление единственно.

Существует два способа нахождения полинома Жегалкина:

- I. Один из них основан на равносильности преобразований для логических функций, заданных в виде ДНФ.

Этот способ основан на том, что $x \oplus 1 \equiv \bar{x}$.

Если функция задана в виде ДНФ, то сначала убирают операцию дизъюнкции, используя при этом законы де Моргана, а все отрицания заменяют двоичным сложением единицы. После этого, раскрывая скобки по обычным правилам, учитывают, что чётное число одинаковых слагаемых равно нулю (по четвёртому свойству), а не чётное число одинаковых слагаемых равно одному такому слагаемому.

Пример: Построить полином Жегалкина для функции

$$F(x, y, z) \equiv (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{y} \wedge z)$$

Решение.

$$F(x, y, z) \equiv (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{y} \wedge z) \equiv \overline{(x \wedge y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) \wedge (\bar{y} \wedge z)} \equiv$$

$$\begin{aligned}
&\equiv ((x \wedge y) \oplus 1) \wedge ((x \oplus 1) \wedge (y \oplus 1) \oplus 1) \wedge ((y \oplus 1) \wedge z \oplus 1) \oplus 1 \equiv \\
&\equiv (xy \oplus 1)((x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1)((y \oplus 1)z \oplus 1) \oplus 1 \equiv \\
&\equiv (xy \oplus 1)(xy \oplus y \oplus x)(yz \oplus z \oplus 1) \oplus 1 \equiv \\
&\equiv (y \oplus x)(yz \oplus z \oplus 1) \oplus 1 \equiv xyz \oplus yz \oplus xz \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus 1 \equiv \\
&\equiv xyz \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus 1
\end{aligned}$$

Последнее выражение и есть полином Жегалкина данной функции.

II. Другой способ:

Другой способ основан на построении таблицы истинности для функции. Пусть задана некоторая функция от n – переменных, запишем её в виде полинома Жегалкина с неопределёнными коэффициентами. Подставляя всевозможные наборы значений переменных в функцию, получим систему уравнений для отыскания неопределённых коэффициентов. Так как число уравнений равно числу коэффициентов (и равно 2^n), то все коэффициенты однозначно определяются.

Пример:

Построить полином Жегалкина для дизъюнкции двух переменных.

$$F(x, y) \equiv x \vee y$$

Решение.

Таблица истинности для дизъюнкции:

x	y	$x \vee y$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Полином Жегалкина с неопределёнными коэффициентами для данной функции:

$$F(x, y) \equiv \alpha_0 \oplus \alpha_1 x \oplus \alpha_2 y \oplus \alpha_{1,2} xy$$

$$\begin{cases} F(1, 1) \equiv \alpha_0 \oplus \alpha_1 \cdot 1 \oplus \alpha_2 \cdot 1 \oplus \alpha_{1,2} \cdot 1 \cdot 1 = 1 \\ F(0, 1) \equiv \alpha_0 \oplus \alpha_1 \cdot 0 \oplus \alpha_2 \cdot 1 \oplus \alpha_{1,2} \cdot 0 \cdot 1 = 1 \\ F(1, 0) \equiv \alpha_0 \oplus \alpha_1 \cdot 1 \oplus \alpha_2 \cdot 0 \oplus \alpha_{1,2} \cdot 1 \cdot 0 = 1 \\ F(0, 0) \equiv \alpha_0 \oplus \alpha_1 \cdot 0 \oplus \alpha_2 \cdot 0 \oplus \alpha_{1,2} \cdot 0 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(1, 1) \equiv \alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_{1,2} = 1 \\ F(0, 1) \equiv \alpha_0 \oplus \alpha_2 = 1 \\ F(1, 0) \equiv \alpha_0 \oplus \alpha_1 = 1 \\ F(0, 0) \equiv \alpha_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{1,2} = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_0 = 0 \end{cases}$$

$$F(x, y) \equiv x \vee y \equiv x \oplus y \oplus xy \equiv x \oplus y \oplus x \wedge y$$

1.16. Проблема разрешимости формул алгебры высказываний.

Все формулы алгебры логики делятся на три класса:

1. Тавтологии
2. Противоречия
3. Выполнимые

В связи с этим, возникает задача: к какому классу относится данная формула? Эта задача носит название **проблема разрешимости**.

Под проблемой разрешимости понимают проблему отнесения формулы алгебры высказываний к определённому классу.

Говорят, что проблема разрешимости разрешима, если существует алгоритм, позволяющий отнести рассматриваемую формулу к определённому классу.

Теорема: Проблема разрешимости формул алгебры высказываний разрешима.

Доказательство:

Самым простым алгоритмом является построение таблицы истинности, по которой можно определить классификацию формулы.

Если последний столбец содержит только значения единица, то формула относится к тавтологии.

Если последний столбец содержит только значения ноль, то формула – противоречие.

Если последний столбец содержит значения и единица и ноль, то формула относится к классу выполнимых формул.

1.17. Нечёткая логика булевых функций.

Перечень всех логических возможностей и значений истинности для булевой функции от двух переменных можно записать в виде таблицы:

Таблица № 1

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1

Булева алгебра является математической основой вычислительной техники. Принимая мозг как логическую машину выводов, в которой нейрон – элементарный вычислительный элемент, присущий любому биологическому компьютеру, физика процессов в котором представляет прохождение и распространение электрических импульсов. Таким образом, искусственная нейронная сеть понимается как конвергенция биологического нейрона и математической логики.

Рассмотрим модель искусственного нейрона (рис. 1).

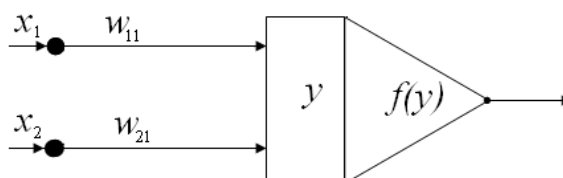


Рис 1. – Схема простого перцептрона.

Ограничим его двумя входами и одним выходом, использующим логистическую функцию активации:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}},$$

с простой производной:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{1 + e^{-x}} \right)' = \left((1 + e^{-x})^{-1} \right)' = -(1 + e^{-x})^{-2} \cdot (-e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^{-2}} = \frac{1 + e^{-x} - 1}{(1 + e^{-x})^{-2}} = \\ &= \frac{1}{1 + e^{-x}} - \frac{1}{(1 + e^{-x})^{-2}} = \frac{1}{1 + e^{-x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-x}} \right) = f(x) \cdot (1 - f(x)) \end{aligned}$$

Для простого перцептрона (рис. 1), где x_1, x_2 – входные сигналы, w_{11}, w_{21} – коэффициенты проводимости сигналов, $f(y)$ – выходной сигнал будет вычисляться по формуле:

$$f(y) = \frac{1}{1 + e^{-(w_{11} \cdot x_1 + w_{21} \cdot x_2)}}$$

Задача состоит в отыскании весовых коэффициентов w_{11}, w_{21} , путём обучения нейронной сетки «с учителем».

Корректировка весовых коэффициентов для матрицы проводимости осуществляется методом «обратного распространения ошибки», заключающейся в минимизации целевой функции ошибки:

$$E(w) = \frac{1}{2} \cdot (f(y) - d)^2,$$

где (x_1, x_2, d) – обучающий вектор.

Простой перцептрон, реализует только логические функции: конъюнкцию f_5 и дизъюнкцию f_{15} .

«Операцию сложения по модулю два»: f_9 – такой логический элемент не может реализовать, то есть нельзя подобрать коэффициенты w_{11}, w_{21} для простого перцептрона.

Используя законы логики, операция «сложение по модулю два» («исключающее или») запишется через операции конъюнкция и дизъюнкция:

$$\begin{aligned} f_9(x_1, x_2) &\equiv \overline{x_1 \leftrightarrow x_2} \equiv \overline{(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1)} \equiv \overline{(x_1 \rightarrow x_2)} \vee \overline{(x_2 \rightarrow x_1)} \equiv \\ &\equiv \overline{(x_1 \vee x_2)} \vee \overline{(x_2 \vee x_1)} \equiv \overline{(x_1 \wedge x_2)} \vee \overline{(x_2 \wedge x_1)} \equiv (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2) \end{aligned}$$

Откуда, схема нейронной сети будет выглядеть следующим образом (рис. 2):

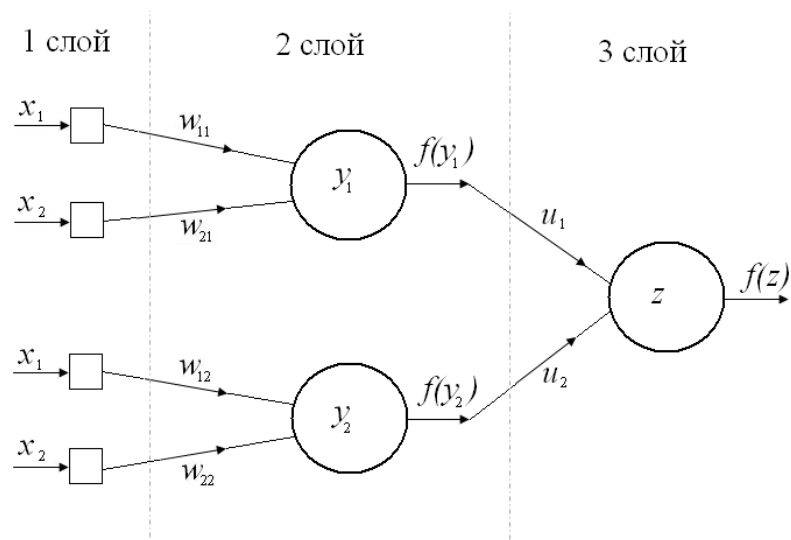


Рис 2.

Первые и вторые слои реализуют логическую операцию конъюнкции, второй и третий слой реализуют логическую операцию дизъюнкции.

Можно упростить схему до общепринятого вида (рис. 3):

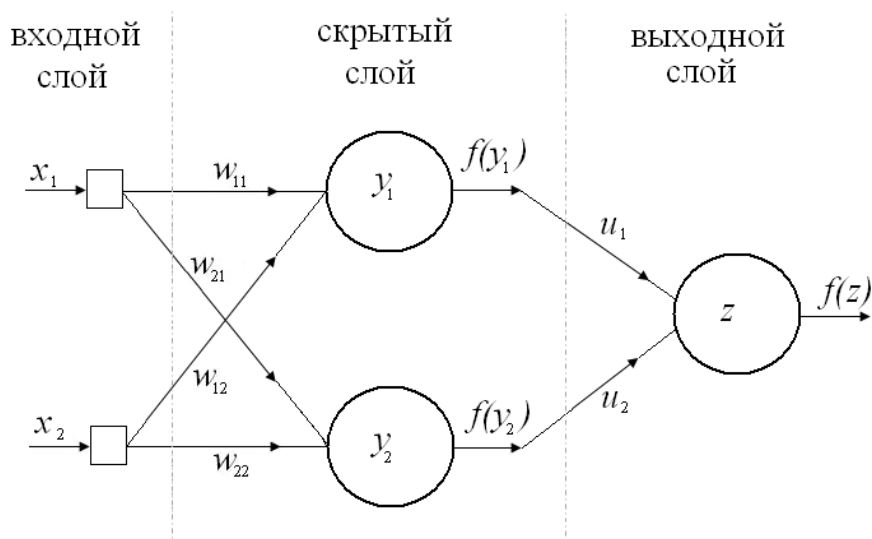


Рис 3. – Трёхслойный перцептрон

Таким образом, полученная нейронная сеть позволяет реализовать логику булевой функции от двух переменных в полном объёме.

Булевы функции от трёх переменных $F(x_1, x_2, x_3)$ принимают $2^{2^3} = 2^8 = 256$ значений.

Для примера рассмотрим следующую формулу алгебры высказываний:

$$F \equiv x_1 \vee x_2 \rightarrow x_3$$

Поскольку, булевой функцией называют, в узком смысле, формулу алгебраического высказывания, содержащую лишь операции: отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию.

Представим последнюю формулу через совершенные конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы (табл. 2).

Таблица № 2

x_1	x_2	x_2	$x_1 \vee x_2$	F	элементарные конъюнкции	элементарные дизъюнкции
0	0	0	0	1	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$	
0	0	1	0	1	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3$	
0	1	0	1	0		$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$
0	1	1	1	1	$\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3$	
1	0	0	1	0		$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$
1	0	1	1	1	$x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3$	
1	1	0	1	0		$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$
1	1	1	1	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$	

$$F \equiv \text{СДНФ} F \equiv (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

$$F \equiv \text{СКНФ} F \equiv (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

Согласно алгоритму построения, сама формула и её СДНФ, и СКНФ равносильны, так как принимают одинаковые значения истинности в каждой логической возможности.

Совершенные формы формулы алгебры логики дают представление о способе проектирования математической модели искусственной нейронной сети прямого распространения сигнала (рис. 4).

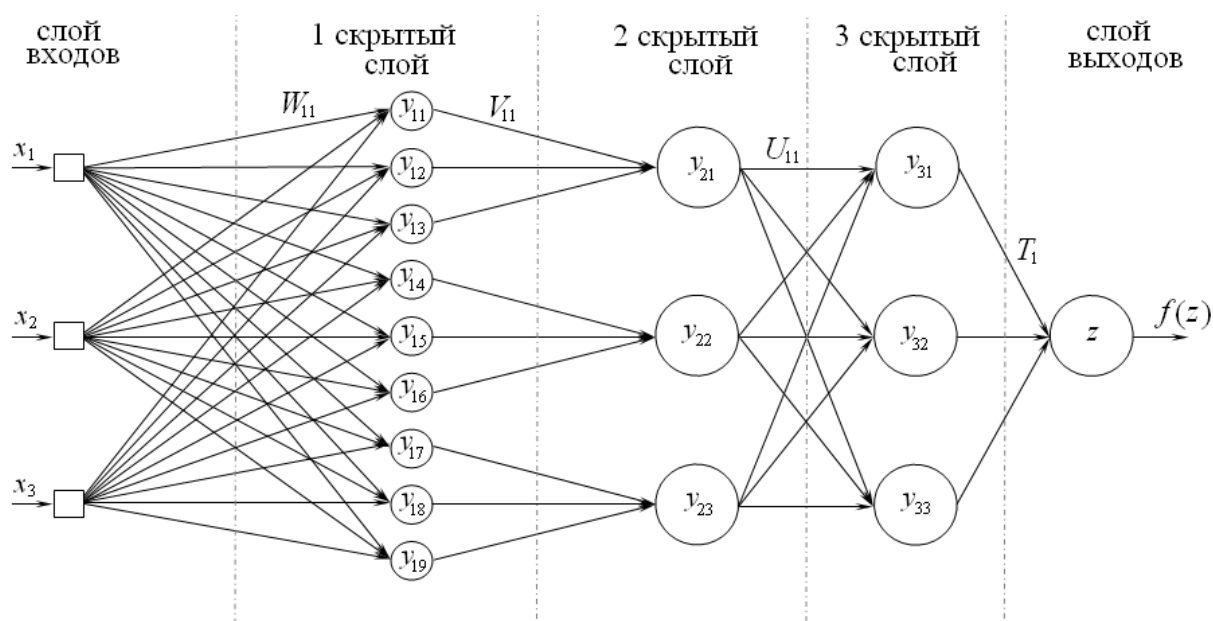


Рис 4. – Нейронная сеть СКНФ F

Слой входов, первый скрытый слой и второй скрытый слой реализуют логическую операцию дизъюнкции, второй скрытый слой, третий скрытый слой и слой выходов реализуют логическую операцию конъюнкции.

Нечёткость логики заключается в том, что на вход нейронной сети могут поступать сигналы отличные от 0 и 1 ($x_1 \in [0,1]$, $x_2 \in [0,1]$), что влияет на уровень выходного сигнала.

В вычислительном эксперименте используется трехслойная нейронная сеть, с входами сдвига – x_0, y_0 , где скрытый слой содержит четыре нейрона.

Схема трёхслойного перцептрона со вторым скрытым слоем представлена на рисунке (рис. 5).

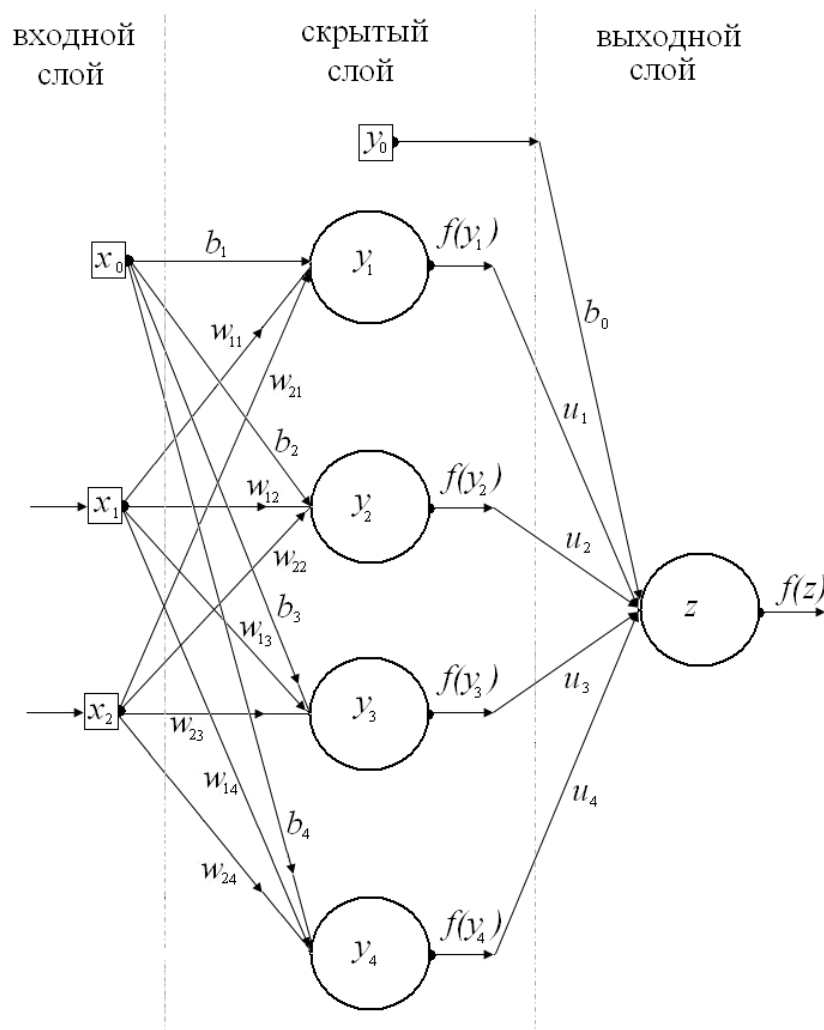


Рис 5. – Нейронная сеть, применяемая в вычислительном эксперименте

Тривиальные случаи для f_1 , f_{16} не рассматривались (графики поверхностей – плоскость). Обучающая выборка векторов берётся из таблицы всех логических возможностей и значений истинности для булевой функции от двух переменных, приведённой выше (табл. 1). Рассмотрим алгоритм отыскания весовых коэффициентов нейронной сети методом «обратного распространения ошибки» на примере булевой функции f_9 – «исключающее или». На первом шаге весовые коэффициенты выбираются произвольно, в случае попадания в локальный минимум их изменяют и продолжают итерации.

Алгоритм обучения нейронной сети:

1) прямой проход вычислений

$$f(y_1) = \frac{1}{1 + e^{-(w_{11} \cdot x_1 + w_{21} \cdot x_2 + b_1)}}$$

$$f(y_2) = \frac{1}{1 + e^{-(w_{12} \cdot x_1 + w_{22} \cdot x_2 + b_2)}}$$

$$f(y_3) = \frac{1}{1 + e^{-(w_{13} \cdot x_1 + w_{23} \cdot x_2 + b_3)}}$$

$$f(y_4) = \frac{1}{1 + e^{-(w_{14} \cdot x_1 + w_{24} \cdot x_2 + b_4)}}$$

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^{-(u_1 \cdot f(y_1) + u_2 \cdot f(y_2) + u_3 \cdot f(y_3) + u_4 \cdot f(y_4) + b_0)}}$$

2) обратный проход – вычисление ошибки, уточнение весовых коэффициентов:

$$E = \frac{1}{2} \cdot (f_9 - f(z))^2$$

– ошибка вычислений, требующая минимизации.

$$EQ = (f_9 - f(z)) \cdot \eta \cdot f(z) \cdot (1 - f(z))$$

– скорость изменения ошибки сети, где η – коэффициент «обучения».

Значение корректирующих коэффициентов выходного слоя:

$$EU_1 = EQ \cdot f(y_1), EU_2 = EQ \cdot f(y_2), EU_3 = EQ \cdot f(y_3), EU_4 = EQ \cdot f(y_4)$$

$$Eb_0 = EQ \cdot y_0 = EQ \cdot 1 = EQ$$

Новые весовые коэффициенты выходного слоя:

$$U_1 = U_1 - EU_1, U_2 = U_2 - EU_2, U_3 = U_3 - EU_3, U_4 = U_4 - EU_4, b_0 = b_0 - Eb_0$$

Значение корректирующих коэффициентов скрытого слоя:

$$EW_{11} = EQ \cdot f(y_1) \cdot (1 - f(y_1)) \cdot x_1$$

$$EW_{12} = EQ \cdot f(y_2) \cdot (1 - f(y_2)) \cdot x_1$$

$$EW_{13} = EQ \cdot f(y_3) \cdot (1 - f(y_3)) \cdot x_1$$

$$EW_{14} = EQ \cdot f(y_4) \cdot (1 - f(y_4)) \cdot x_1$$

$$EW_{21} = EQ \cdot f(y_1) \cdot (1 - f(y_1)) \cdot x_2$$

$$EW_{22} = EQ \cdot f(y_2) \cdot (1 - f(y_2)) \cdot x_2$$

$$EW_{23} = EQ \cdot f(y_3) \cdot (1 - f(y_3)) \cdot x_2$$

$$EW_{24} = EQ \cdot f(y_4) \cdot (1 - f(y_4)) \cdot x_2$$

$$Eb_1 = EQ \cdot f(y_1) \cdot (1 - f(y_1))$$

$$Eb_2 = EQ \cdot f(y_2) \cdot (1 - f(y_2))$$

$$Eb_3 = EQ \cdot f(y_3) \cdot (1 - f(y_3))$$

$$Eb_4 = EQ \cdot f(y_4) \cdot (1 - f(y_4))$$

Новые весовые коэффициенты скрытого слоя:

$$w_{11} = w_{11} - EW_{11}, \quad w_{12} = w_{12} - EW_{12}, \quad w_{13} = w_{13} - EW_{13}, \quad w_{14} = w_{14} - EW_{14}$$

$$w_{21} = w_{21} - EW_{21}, \quad w_{22} = w_{22} - EW_{22}, \quad w_{23} = w_{23} - EW_{23}, \quad w_{24} = w_{24} - EW_{24}$$

$$b_1 = b_1 - Eb_1, \quad b_2 = b_2 - Eb_2, \quad b_3 = b_3 - Eb_3, \quad b_4 = b_4 - Eb_4$$

Затем повторяем первый – прямой и второй – обратный проход, пока ошибка не достигнет требуемого значения.

Далее, повторяем весь комплекс итераций для остальных обучающих векторов. Проведя несколько эпох обучения нейронной сети, получают весовые коэффициенты, удовлетворяющие обучающему набору векторов с заданной точностью ошибки.

Вычисления проводились с использованием табличного процессора типа «Эксель» и математического пакета «Мапле».

Обучающие векторы (табл. 3):

Таблица № 3

x_1	x_2	f_9
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Получены следующие весовые коэффициенты нейронной сети, реализующей логическую операцию «исключающее или»:

$$w = \begin{pmatrix} 4.825497 & 4.795936 & 4.736567 & -4.17101 \\ 5.692781 & 5.66451 & 5.608841 & -4.08101 \end{pmatrix}$$

$$b = (-1.954208 \quad -1.937782 \quad -1.904757 \quad 6.223285)$$

$$u = (4.931661 \quad 4.723689 \quad 3.938937 \quad 13.1741)$$

$$b_0 = -19.77147$$

Для данных весовых коэффициентов проведён прямой проход вычислений.

Результат вычислений представлен на рисунке, где функция f_9 задаётся табличным способом (рис. 6)

	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.
0.01	0.0086141	0.0094398	0.0103827	0.0114622	0.0127017	0.0141286	0.0157757	0.0176819	0.0198936	0.0224658	0.0254640	0.0289660	0.0330637	0.0378658	0.04350
0.02	0.0093038	0.0102172	0.0112841	0.0124969	0.0138926	0.0155029	0.0173659	0.0195266	0.0220385	0.0249654	0.0283831	0.0323810	0.0370653	0.0425603	0.04901
0.03	0.0100750	0.0111097	0.0122965	0.0136617	0.0152363	0.0170571	0.0191680	0.0216212	0.0244787	0.0277814	0.0315150	0.0356284	0.0401437	0.0451931	0.05132
0.04	0.0109390	0.0121005	0.0134360	0.0149756	0.0167553	0.0188177	0.0212137	0.0240036	0.0272591	0.0310652	0.0353226	0.0400497	0.0452881	0.0510906	0.05755
0.05	0.0119086	0.0132151	0.0147207	0.0164603	0.0184755	0.0208157	0.0235197	0.0267172	0.0304312	0.0347795	0.0398777	0.0458611	0.0528876	0.0611394	0.07082
0.06	0.0129991	0.0144715	0.0161720	0.0181412	0.0204270	0.0230868	0.0261884	0.0298126	0.0340546	0.0390272	0.0448625	0.0517144	0.0597615	0.0692078	0.08028
0.07	0.0142277	0.0158902	0.0178145	0.0200474	0.0226446	0.0256722	0.0292089	0.0333475	0.0381977	0.0438885	0.0505703	0.0584176	0.0676303	0.0784347	0.09108
0.08	0.0156147	0.0174952	0.0196765	0.0222128	0.0251684	0.0286198	0.0326575	0.0373886	0.0429386	0.0494545	0.0571069	0.0660916	0.0766308	0.0889722	0.10338
0.09	0.0171833	0.0193143	0.0217912	0.0246766	0.0280449	0.0319844	0.0365993	0.0420122	0.0483664	0.0558287	0.0645908	0.0748708	0.0869124	0.1009829	0.11736
0.1	0.0189604	0.0213794	0.0241964	0.0274839	0.0313277	0.0358294	0.041086	0.0473052	0.0545821	0.0631270	0.0731537	0.0849022	0.0986361	0.1146381	0.13320
0.11	0.0209773	0.0237277	0.0269364	0.0306870	0.0350784	0.0402273	0.0462703	0.0533664	0.0616993	0.0714787	0.0829405	0.0963447	0.1119716	0.1301127	0.15105
0.12	0.0232701	0.0264020	0.0300618	0.0343458	0.0393678	0.0452609	0.0521807	0.0603068	0.0698447	0.0810262	0.0941077	0.1093667	0.1270935	0.1475791	0.17109
0.13	0.0258804	0.0294517	0.0336311	0.0385294	0.0442766	0.0510245	0.0589488	0.0682509	0.0791583	0.0919240	0.1068223	0.1241421	0.1441752	0.1671989	0.19345
0.14	0.0288564	0.0329339	0.0377117	0.0433166	0.0498968	0.0576243	0.0666962	0.0773359	0.0897925	0.1043372	0.1212573	0.1408449	0.1633809	0.1891124	0.21822
0.15	0.0322537	0.0369140	0.0423803	0.0487972	0.0563326	0.0651797	0.0755578	0.0877120	0.1019103	0.1184379	0.1375871	0.1596417	0.1848556	0.2134256	0.24545
0.16	0.0361360	0.0414671	0.0477247	0.0550728	0.0637006	0.0738232	0.0856816	0.0995405	0.1156829	0.1344008	0.1559803	0.1806817	0.2087126	0.2401969	0.27514
0.17	0.0405765	0.0466788	0.0538443	0.0622580	0.0721309	0.0837001	0.0972266	0.1129911	0.1312848	0.1523959	0.1765901	0.2040852	0.2350202	0.2694220	0.30717
0.18	0.0456588	0.0526462	0.0608510	0.0704801	0.0817665	0.0949676	0.1103614	0.1282381	0.1488875	0.1725800	0.1995429	0.2299295	0.2637866	0.3010212	0.34137
0.19	0.0514778	0.0594788	0.0688369	0.0798797	0.0927623	0.1077927	0.1252597	0.1454540	0.1686507	0.1950854	0.2249251	0.2582353	0.2949470	0.3348288	0.37747
0.2	0.0581405	0.0672991	0.0780388	0.0906097	0.1052837	0.1223482	0.1420945	0.1648014	0.1907122	0.2200068	0.2527687	0.2889521	0.3283525	0.3705882	0.41509
0.21	0.0657670	0.0762427	0.0885086	0.1028335	0.1195028	0.1388080	0.1601032	0.1846228	0.2151746	0.2473874	0.2830377	0.3219473	0.3637633	0.4079531	0.45582
0.22	0.0744904	0.0864579	0.1004407	0.1167221	0.1355934	0.1573392	0.1822166	0.2104283	0.2420917	0.2772047	0.3156152	0.3569984	0.4008498	0.4464977	0.49313
0.23	0.0844567	0.0981044	0.1140065	0.1324496	0.1537746	0.1780979	0.2057677	0.2368819	0.2714541	0.3093577	0.3497949	0.3937917	0.4401098	0.4877336	0.53747

Рис 6. – Фрагмент табличного задания функции «исключающее или»

Используя табличные данные, строится трёхмерный график функции.

Поверхность представляет геометрическую интерпретацию нечёткой логики нейронной сети булевой функции «исключающее или» (рис. 7).

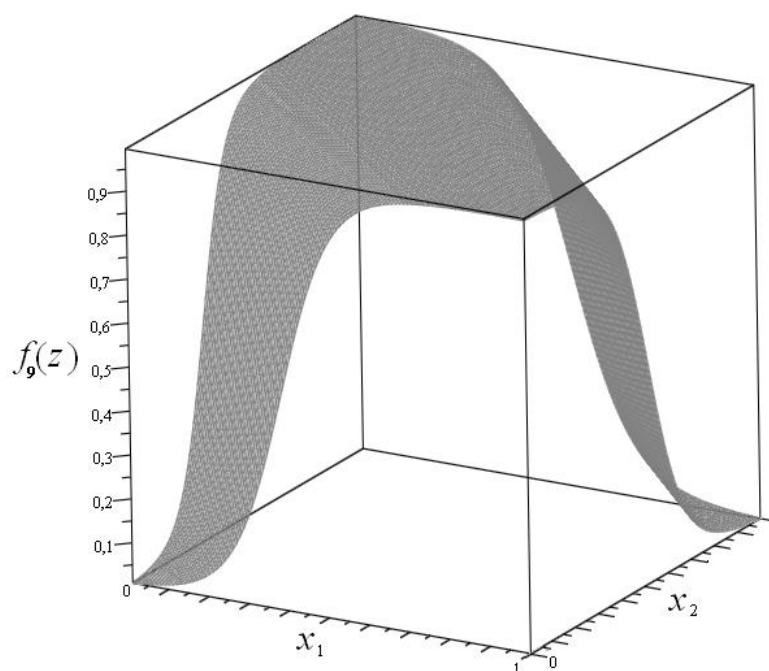


Рис 7. – График функции «исключающее или»

Следующая поверхность представляет геометрическую интерпретацию нечёткой логики нейронной сети булевой функции: $f_{10}(x,y)=y$, полностью определяется уже своими весовыми коэффициентами (рис. 8).

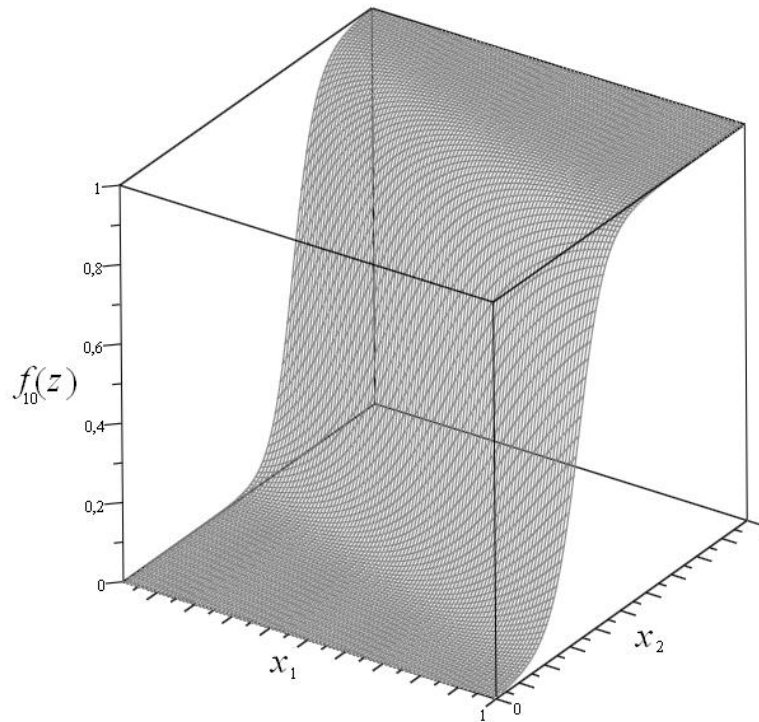


Рис 8. – График функции f_{10}

Следующая поверхность представляет геометрическую интерпретацию нечёткой логики нейронной сети, реализующей булеву функцию «стрелка Пирса»: $f_{15} = \overline{x_1 \vee x_2}$ (рис. 9).

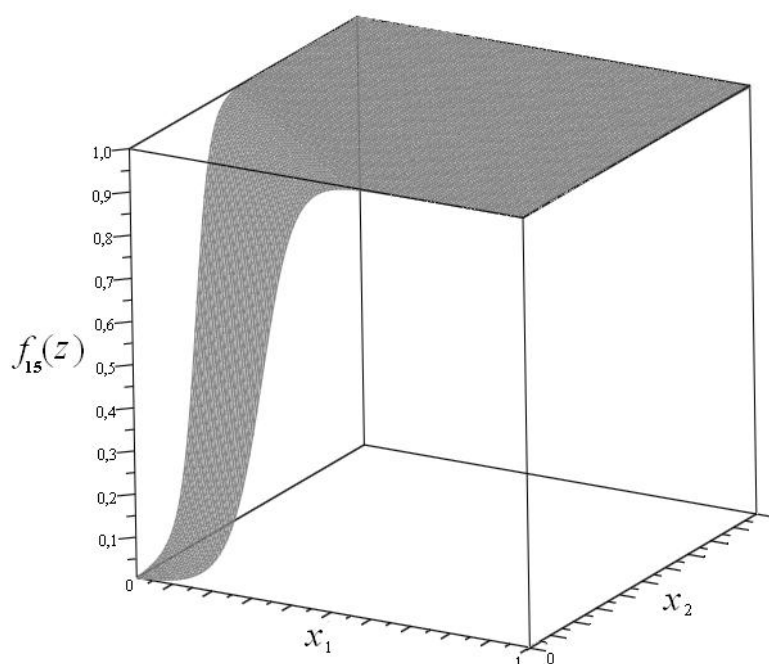


Рис 9. – График функции «стрелка Пирса»

Булевы функции от двух переменных описываются четырьмя типами поверхностей нечёткой логики, понимание которой способствует формированию выборки обучающих векторов нейронной сети. Каждая из шестнадцати булевых функций от двух переменных однозначно определяется своим набором из четырёх «базовых» обучающих вектора. Логично предположить, что каждая булева функция от трёх переменных однозначно определяется своим набором из восьми «базовых» обучающих вектора. Для обучения нейронной сети с n -входами требуется 2^n «базовых» обучающих вектора.

1.18. Полные системы связок (ПСС).

Пусть Ω – множество всевозможных унарных и бинарных операций (или связок, которых двадцать).

Обозначим через $\theta = \{ \bar{}, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim \}$, $\theta \subset \Omega$ – множество основных связок. Обозначим через $\Omega_1 \subset \Omega$.

Пусть $\Phi_1(\Omega_1)$ – множество формул, содержащих связки из множества Ω_1 .

Если всякая формула из множества формул $\Phi_1(\Omega_1)$ равносильна некоторой формуле из множества формул $\Phi(\Omega)$, то множество Ω_1 называется *полной системой связок* (П.С.С.)

$$\forall F \in \Phi_1(\Omega_1) \exists G \in \Phi(\Omega) : F \equiv G \Rightarrow \Omega_1 - \text{П.С.С.}$$

Свойства П.С.С.

1) θ – полная система связок. (П.С.С.), так как $\theta \subset \Omega$ и $\forall F \in \Phi(\theta) :$

$$F \equiv F$$

2) если Ω_1 – П.С.С. и $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \Omega_2$ – П.С.С.

3) пусть $\Omega_1 \subset \Omega$, Ω_2 – П.С.С.

если $\forall F \in \Phi_2(\Omega_2) \exists G \in \Phi_1(\Omega_1) : F \equiv G \Rightarrow \Omega_1$ – П.С.С.

Теоремы о связке отрицания:

Т1. Пусть $M \subset \theta$, если M – П.С.С., то оно содержит связку отрицание.

Доказательство: (методом от противного)

Предположим, что M – П.С.С., но не содержит связки отрицание, то есть $M \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \sim \}$ (могут принадлежать).

Тогда рассмотрим формулу с двумя переменными из множества формул, содержащих связки из множества M :

$$F(x, y) \in \Phi(M), \text{ при } x = 1, y = 1 \Rightarrow F(1, 1) \equiv 1$$

Значит, эта формула не равносильна никакому противоречию из множества формул $\Phi(\theta)$, содержащих связки из множества θ .

Пришли к противоречию с предположением, а значит M – не П.С.С.

T2. Множество, содержащее лишь связку отрицание, не является П.С.С.

Доказательство: предположим, что множество содержит лишь связку отрицание $M = \{\neg\}$ – П.С.С., тогда любая формула из множества формул, содержащих связку отрицания, может иметь только такой вид:

$$\forall F(x) \equiv x^{\overline{M}\}_{n-\text{раз}}} \equiv \begin{cases} x, n - \text{чётно} \\ \neg x, n - \text{нечётно} \end{cases}$$

Следовательно, эта формула не равносильна единице и неравносильна нулю:

$$F(x) \neq 1 \neq 0$$

А значит, множество, содержащее лишь связку отрицание, не является П.С.С.

Теоремы о множествах из множества Θ , являющегося П.С.С.

T1. $M_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$

T2. $M_2 = \{\neg, \wedge, \vee\}$

T3. $M_3 = \{\neg, \wedge\}, M_3^* = \{\neg, \vee\}, M_3^\circ = \{\neg, \rightarrow\}$

Для доказательства этих теорем нужно выразить эквиваленцию через операции множества M_1 , импликацию выразить через операции множества M_2 , эквиваленцию и импликацию выразить через операции множества M_3 .

Одноэлементные П.С.С.

Теорема:

Множества $\{\overline{\wedge}\}, \{\overline{\vee}\}$ являются П.С.С.

Доказательство:

Это означает, что все логические операции можно выразить через *штрих Шеффера* или *стрелку Пирса*.

Определим эти связки при помощи таблиц истинности:

x	y	$x \bar{\wedge} y$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	1

x	y	$x \bar{\vee} y$
1	1	0
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Покажем, что любая операция из множества $\theta = \{ \bar{}, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim \}$ может быть выражена через:

штрих Шеффера:

$$\bar{a} \equiv \overline{a \wedge a} \equiv a \bar{\wedge} a$$

$$a \wedge b \equiv \overline{\overline{a \wedge b}} \equiv \overline{a \bar{\wedge} b} \equiv (a \bar{\wedge} b) \bar{\wedge} (a \bar{\wedge} b)$$

$$a \vee b \equiv \overline{\overline{a \vee b}} \equiv \overline{\bar{a} \bar{\wedge} \bar{b}} \equiv \bar{a} \bar{\wedge} \bar{b} \equiv (a \bar{\wedge} a) \bar{\wedge} (b \bar{\wedge} b)$$

$$a \rightarrow b \equiv \bar{a} \vee b \equiv a \bar{\wedge} \bar{b} \equiv a \bar{\wedge} (b \bar{\wedge} b)$$

$$\begin{aligned} a \sim b &\equiv (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) \equiv \overline{\overline{(\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee a)}} \equiv \overline{(\bar{a} \vee b) \bar{\wedge} (\bar{b} \vee a)} \equiv \\ &\equiv \overline{(\overline{a \wedge \bar{b}}) \bar{\wedge} (\overline{b \wedge \bar{a}})} \equiv \left((\overline{a \wedge \bar{b}}) \bar{\wedge} (\overline{b \wedge \bar{a}}) \right) \bar{\wedge} \left((\overline{a \wedge \bar{b}}) \bar{\wedge} (\overline{b \wedge \bar{a}}) \right) \equiv \\ &\equiv \left((a \bar{\wedge} (b \bar{\wedge} b)) \bar{\wedge} (b \bar{\wedge} (a \bar{\wedge} a)) \right) \bar{\wedge} \left((a \bar{\wedge} (b \bar{\wedge} b)) \bar{\wedge} (b \bar{\wedge} (a \bar{\wedge} a)) \right) \end{aligned}$$

стрелку Пирса:

$$\bar{a} \equiv \overline{a \vee a} \equiv a \bar{\vee} a \equiv a \downarrow a$$

$$a \wedge b \equiv \overline{\overline{a \wedge b}} \equiv \overline{\bar{a} \bar{\vee} \bar{b}} \equiv (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)$$

$$a \vee b \equiv \overline{\overline{a \vee b}} \equiv \overline{a \downarrow b} \equiv (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)$$

$$a \rightarrow b \equiv \bar{a} \vee b \equiv \overline{\overline{\bar{a} \vee b}} \equiv ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((a \downarrow a) \downarrow b)$$

$$\begin{aligned}
a \sim b &\equiv (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) \equiv \overline{\overline{(\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee a)}} \equiv \overline{(\bar{a} \vee b) \vee (\bar{b} \vee a)} \equiv \\
&\equiv (\bar{a} \downarrow b) \downarrow (\bar{b} \downarrow a) \equiv ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((b \downarrow b) \downarrow a)
\end{aligned}$$

Теорема: (об исключительности одноэлементных П.С.С.)

Множество, содержащее одну операцию, является П.С.С. тогда и только тогда, когда эта операция является либо штрихом Шеффера $(\bar{\wedge}, \backslash)$, либо стрелкой Пирса $(\bar{\vee}, \downarrow)$.

2. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

2.1. Формальные и содержательные теории.

Для создания аксиоматической теории пользуются следующими принципами:

- 1) задают язык теории, то есть алфавит и понятие формулы данной теории;
- 2) задают аксиомы данной теории;
- 3) задают правила вывода новых формул или теорем рассматриваемых теорией.

По типу правил вывода теории делятся на:

- содержательные аксиоматические теории;
- формальные аксиоматические теории.

Содержательные аксиоматические теории – это теории, правила вывода в которых считаются интуитивно известными и вопрос об их формализации не ставится (геометрия, изучаемая в школьном курсе).

Формальные аксиоматические теории – это теории, в которых логический аппарат постулируется, то есть указывается перечень правил, которыми и только которыми можно пользоваться при выводе одних утверждений из других.

Алгебра высказываний (АВ) является содержательной теорией. Построим по ней теорию **исчисления высказываний (ИВ)**, которая является формализацией алгебры высказываний.

2.2 Язык, понятие формулы и аксиомы исчисления высказываний.

Под алфавитом будем понимать:

- 1) счётное множество символов $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, z_1, z_2, \dots\}$ – основные символы (буквы) алфавита;
- 2) множество связок $\{\neg, \rightarrow\}$ – логические символы;
- 3) скобки $()$ – вспомогательные символы.

Формулу теории исчисления высказываний определим следующим образом:

- 1) все буквы являются формулами;
- 2) если ***a*** и ***b*** формулы, то формулами будут являться:

$$\bar{a}, \bar{b}, (a \rightarrow b), (a \rightarrow b);$$

- 3) других формул нет.

Аксиомы теории исчисления высказываний:

$$A1: (A \rightarrow (B \rightarrow A));$$

$$A2: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C));$$

$$A3: (\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow ((\bar{B} \rightarrow A) \rightarrow B).$$

Правила вывода:

1. **Правило подстановки:** если известно, что некоторая формула исчисления высказываний, зависящая от букв $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, является доказуемой, то есть теоремой, то её доказуемость сохранится в случае, если вместо $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ подставить любую формулу исчисления высказываний.
2. **Правило заключения:** если доказуемой является формула $(A \rightarrow B)$, то доказуемой будет являться также формула B (или запись через функции вида: $f(A, (A \rightarrow B)) = B$).

Выводимость (доказуемость) формул теории исчисления высказываний.

Выводом в теории будем называть всякую конечную последовательность формул $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$, каждая из которых является либо аксиомой, либо получена из предыдущих формул по правилам вывода, при этом формулу $\{B_n\}$ называют выводимой формулой с использованием вывода длины $(n - 1)$.

Доказуемые формулы обозначают $\{\vdash B_n\}$.

Конечная последовательность формул $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ называется выводом из гипотез (или множеством формул гипотез Γ), если каждая из формул $\{U_i, i = \overline{1, n}\}$ этой последовательности является либо аксиомой, либо произвольной формулой теории исчисления высказываний, либо получена из предыдущих по правилам вывода.

В этом случае формула $\{U_n\}$ называется выводимой из множества формул гипотез Γ и записывается: $\{\Gamma \vdash U_n\}$.

Формула теории ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ называется доказуемой, если существует вывод, оканчивающийся этой формулой, причём каждая формула вывода может быть:

- 1) аксиомой;
- 2) доказуемой (теоремой);
- 3) формулой из множества гипотез Γ ;
- 4) получена из предыдущих по правилам вывода.

Теорема:

Формула исчисления высказываний доказуема тогда и только тогда, когда она выводима из пустого множества гипотез.

$$\forall U : \vdash U \Leftrightarrow \Gamma \equiv \emptyset \Rightarrow \Gamma \vdash U$$

2.3. Производные правила вывода.

1. Правило сложного заключения.

Данное правило применяется к формулам вида:

$$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow L)K)) \dots)$$

и формулируется так:

если формулы $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, и $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow L)K)) \dots)$ доказуемы, то и формула L доказуема.

Правило сложного заключения схематично записывается так:

$$\frac{\vdash A_1, \vdash A_2, \dots, \vdash A_n, \vdash (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow L)K)) \dots))}{\vdash L}$$

2. Правило силлогизма.

Если доказуемы формулы $(A \rightarrow B)$ и $(B \rightarrow C)$, то доказуема и формула $(A \rightarrow C)$, то есть

$$\frac{\vdash(A \rightarrow B), \vdash(B \rightarrow C)}{\vdash(A \rightarrow C)}$$

2.4 Правила выводимости гипотез.

1. $\frac{H \vdash A}{H, W \vdash A}$, где $H = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ – произвольные формулы ИВ,
 $W = \{W_1, W_2, \dots, W_n\}$, $H, W = H \cup W$

2. $\frac{\vdash(A \rightarrow B), \vdash(B \rightarrow C)}{\vdash(A \rightarrow C)}$, где C – некоторая формула ИВ.

3. Если формула A выводима из множества H и некоторого его подмножества, то в выводе формулы A можно отбросить гипотезы из H , не вошедшие в её непосредственный вывод.

4. $\frac{H, C \vdash A, W \vdash C}{H, W \vdash A}$

5. $\frac{H \vdash C \rightarrow A}{H, C \vdash A}$, где C – некоторая формула ИВ.

6. Теорема дедукции:

Если из множества формул $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$, выводима формула B , то $B_1, B_2, \dots, B_{n-1} \vdash B_n \rightarrow B$.

Данную теорему можно записать:

$$\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B$$

Следствия теоремы дедукции.

1. Правило силлогизма (ПС).

Для любых формул A, B, C справедлива выводимость:

$$(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C)$$

2. Правило исключения промежуточной посылки (ПИПП).

Для любых формул A, B, C справедлива выводимость:

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash (A \rightarrow C)$$

3. Правило перестановки посылок (ППП).

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$$

4. Обобщённая теорема дедукции (ОТД).

Если из формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ выводима формула B , то выводимой будет являться формула: $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow B)) \dots))$ или

$$\frac{A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B}{A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow B)) \dots))}$$

2.5. Некоторые примеры доказательств, использующие теорему дедукции. Теорема о выводимости.

1. Закон двойного отрицания:

$$\text{а) } \vdash \bar{\bar{B}} \rightarrow B$$

$$\text{б) } \vdash B \rightarrow \bar{\bar{B}}$$

2. Закон противоречивой посылки:

$$\vdash \bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B)$$

3. Закон контрапозиции:

$$\text{а) } \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$$

$$\text{б) } \vdash (\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

4. Первое правило отрицания импликации:

$$\vdash A \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \overline{(A \rightarrow B)})$$

5. Обобщённое правило противоречивой посылки:

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow B)$$

6. Теорема о выводимости:

Пусть $A = A(B_1, B_2, \dots, B_k)$ - формула от $B_1, B_2, \dots, B_k$ высказывательных переменных, α - некоторая логическая возможность формулы A . Положим:

$$B'_i = \begin{cases} B_i, & \text{если } B_i = 1 \text{ в логической возможности } \alpha \\ \bar{B}_i, & \text{если } B_i = 0 \text{ в логической возможности } \alpha \end{cases}$$

$$A'_i = \begin{cases} A_i, & \text{если } A_i = 1 \text{ в логической возможности } \alpha \\ \bar{A}_i, & \text{если } A_i = 0 \text{ в логической возможности } \alpha \end{cases}$$

Теорема: $B'_1, B'_2, \dots, B'_n \vdash A'$

2.6. Проблемы аксиоматического исчисления высказываний.

Всякая аксиоматическая теория для своего обоснования требует рассмотрения четырёх проблем:

- 1) Проблемы разрешимости;
- 2) Проблемы непротиворечивости;
- 3) Проблемы полноты;
- 4) Проблемы независимости.

1. Проблемы разрешимости исчисления высказываний.

Проблема разрешимости исчисления высказываний заключается в доказательстве существования алгоритма, который позволил бы для любой заданной формулы исчисления высказываний определить, является ли она доказуемой или не является.

Имеет место **теорема:** проблема разрешимости для исчисления высказываний разрешима.

Действительно, любая формула исчисления высказываний может рассматриваться как формула алгебры высказываний, и, следовательно, можно рассматривать её логические значения на различных наборах значений, входящих в неё переменных.

2. Проблемы непротиворечивости исчисления высказываний.

Логическое исчисление называется непротиворечивым, если в нём не доказуемы никакие две формулы, из которых одна является отрицанием другой.

Другими словами, *аксиоматическое исчисление называется непротиворечивым*, если в нём не существует такая формула A , что доказуема как формула A , так и формула $\neg A$.

Проблема непротиворечивости заключается в выяснении вопроса: является данное исчисление непротиворечивым или нет?

Если в исчислении обнаруживаются доказуемые формулы вида A и $\neg A$, то такое исчисление называется противоречивым. В рассмотренном нами исчислении высказываний невозможно вывести одновременно формулы A и $\neg A$, то есть это исчисление высказываний непротиворечно.

3. Проблемы полноты исчисления высказываний.

Пусть T' - некоторая аксиоматическая теория, T – её формализация.

Теория T называется полной относительно теории T' тогда и только тогда, когда все теоремы теории T тождественно истина в теории T' .

Теорема о полноте: Исчисление высказываний ($ИВ$) является полной теорией относительно алгебры высказываний ($АВ$).

Данную теорему можно сформулировать иначе: Формула $ИВ$ является доказуемой тогда и только тогда, когда эта формула является тавтологией в $АВ$.

4. Проблемы независимости исчисления высказываний.

Для всякого аксиоматического исчисления возникает вопрос о независимости его аксиом. Вопрос этот ставится так: можно ли какую-нибудь аксиому вывести из остальных аксиом, применяя правила вывода данной системы?

Если для некоторой аксиомы системы это возможно, то эту аксиому можно исключить из списка аксиом системы, и логическое исчисление при

этом не изменится, то есть класс доказуемых формул останется без изменений.

Аксиома A называется независимой от всех остальных аксиом исчисления, если она не может быть выведена из остальных аксиом. Система аксиом исчисления называется независимой, если каждая аксиома системы независима.

Теорема: Система аксиом ИВ независима.

3. АЛГЕБРА ПРЕДИКАТОВ.

3.1. Высказывательные формы. Предикаты, основные определения.

Определение Ноль местной высказывательной формой называется высказывание об элементах некоторого множества M .

Определение Одноместной высказывательной формой называется высказывание, содержащие переменную об элементах некоторого множества M .

Пример:

«Студент x учится в Южном Федеральном Университете», «Студент y учится в СКСИ», где переменные $\{x, y\}$ принадлежат некоторому множеству студентов.

Определение n -местной высказывательной формой называется высказывание, содержащее n переменных об элементах некоторого множества M .

Пример:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 5$$

Если вместо переменных, входящих в высказывательную форму, подставить их конкретные значения из множества M , то высказывательная форма обратится в высказывание, которое может быть: либо истинным, либо ложным. Таким образом, высказывательная форма задаёт некоторую функцию с областью определения на множестве M и областью значения на множестве $\{0, 1\}$ (ложь, истина), эту функцию называют предикатной.

Следовательно, предикаты могут быть: *одноместными, двухместными, ..., n -местными.*

Определение n – местным предикатом называется n – местная функция $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, такая что отображает множество M на множество $\{0, 1\}$.

Переменные, входящие в запись предикатов называются предметными переменными, а область значения M – предметной областью.

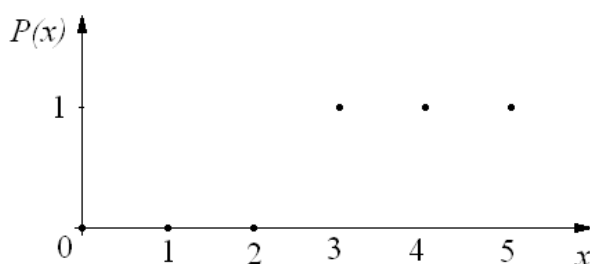
Поскольку предикат – это функция, то для него справедливы все способы задания функции:

- аналитический, $P(x) \equiv (x > 2)$,
- табличный (лишь для конечных предметных областей),
- словесный (с помощью высказывательной формы),
- графический (когда множество M – числовое, для двуместных и трёхместных предикатов).

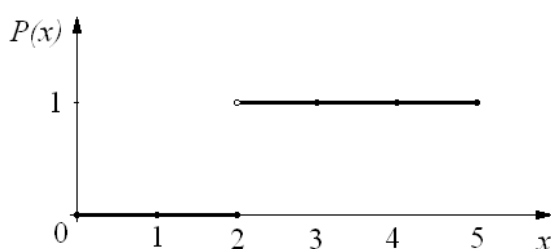
Пример:

Рассмотрим табличный и графический способ для предиката:
 $P(x)$: " $x > 2$ ", $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

x	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	0	0	0	1	1	1



Если же $P(x)$: " $x > 2$ ", $M = [0; 5]$



3.2. Область истинности предикатов.

Рассмотрим одноместный предикат, определённый на некотором множестве.

Определение Областью истинности предиката называется подмножество множества M , которое содержит те элементы из множества M , которые предикат обращают в истинное высказывание.

$$I_{P(x)} \subset M : I_{P(x)} = \{a \in M | P(x) \equiv 1\}$$

Пример: Найти область истинности предиката: $P(x): \frac{x^2-3x+2}{x-1} = 0$

Решение.

$$M_{P(x)} = R \setminus \{1\} \Rightarrow x \neq 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = 1 \notin M_{P(x)}, \quad x_2 = 2 \in M_{P(x)}$$

$$I_{P(x)} = \{2\}$$

Пусть $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n – местный предикат, определённый на некотором множестве M :

$$I_{P(x_1, x_2, \dots, x_n)} \subset M : I_{P(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in M | P(a_1, a_2, \dots, a_n) \equiv 1\}$$

Предикат $P(x)$, определённый на области M называется тождественно истинным на этой области, если его область истинности совпадает с предметной областью.

$$P(x) \equiv 1 \Leftrightarrow I_{P(x)} = M_{P(x)}$$

Предикат $P(x)$, определённый на области M называется тождественно ложным на этой области, если его область истинности равна нулю.

$$P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow I_{P(x)} = 0$$

Предикат $P(x)$ называется выполнимым на множестве M , если его область истинности является под множеством множества M .

$$P(x) - \text{выполним} \Leftrightarrow I_{P(x)} \neq 0 \wedge I_{P(x)} \neq M_{P(x)} \Rightarrow I_{P(x)} \subset M_{P(x)}$$

3.3. Логические операции над предикатами.

Предикаты так же, как высказывания, могут принимать два значения: «истина» (1) и «ложь» (0), поэтому к ним применимы все операции АЛГЕБРЫ

ВЫСКАЗЫВАНИЙ, в результате чего из элементарных предикатов формируются сложные предикаты (как и в логике высказываний, где из элементарных высказываний формировались сложные, составные). Рассмотрим применение операций алгебры высказываний на примерах одноместных предикатов. Эти операции в алгебре предикатов сохраняют тот же смысл, который был им присвоен в алгебре высказываний.

Пусть на некотором множестве M определены два предиката:

- 1) **Отрицанием** предиката называется новый предикат, определённый на той же предметной области M и принимающий значение «истина» при тех и только тех значениях предметной переменной, при которых исходный предикат принимает значение «ложь».
- 2) **Конъюнкцией** двух предикатов называется новый (сложный) предикат, определённый на той же предметной области M и принимающий значение «истина» при тех и только тех значениях предметной переменной, при которых каждый из исходных предикатов принимает значение «истина».
- 3) **Дизъюнкцией** двух предикатов называется новый (сложный) предикат, определённый на той же предметной области M и принимающий значение «ложь» при тех и только тех значениях предметной переменной, при которых каждый из исходных предикатов принимает значение «ложь».
- 4) **Импликацией** двух предикатов называется новый (сложный) предикат, определённый на той же предметной области M и принимающий значение «ложь» при тех и только тех значениях предметной переменной, при которых одновременно первый из исходных предикатов принимает значение «истина», а второй – «ложь».
- 5) **Эквиваленцией** двух предикатов называется новый (сложный) предикат, определённый на той же предметной области M и принимающий значение «истина» при тех и только тех значениях

предметной переменной, при которых оба из исходных предикатов принимает одинаковые значения истинности.

3.4. Таблица истинности логических операций над предикатами.

$P(x)$	$Q(x)$	$\overline{P(x)}$	$\overline{Q(x)}$	$P(x) \wedge Q(x)$	$P(x) \vee Q(x)$	$P(x) \rightarrow Q(x)$	$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$
1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1

3.5. Кванторные операции.

I. Квантор общности $\forall$

Пусть $P(x)$ – предикат, определённый на множестве M .

Запись $\forall x P(x)$ представляет собой операцию «навешивания» квантора общности по правилу: поставим в соответствие одноместному предикату высказывание «для любого x выполняется $P(x)$ », которое истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента из множества M , и ложно в противном случае.

$$\forall x P(x) \equiv 1 \Leftrightarrow P(x) \equiv 1, x \in I_{P(x)} = M$$

$$\forall x P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \exists x: P(x) \equiv 0, x \in I_{P(x)} \subset M$$

Предикат уже не зависит от переменной x . Переменную x в предикате называют свободной (ей можно придавать различные значения из множества M), в высказывании $\forall x P(x)$ переменную x называют связанной квантором общности.

Пример:

$$\forall x (x \geq 1) \equiv 0, x \in R$$

$$\forall x (x \geq 1) \equiv 1, x \in N$$

II. Квантор существования $\exists$

Запись $\exists x P(x)$ представляет собой операцию «навешивания» квантора существования по правилу: поставим в соответствие одноместному предикату высказывание «существует x , при котором выполняется $P(x)$ »,

которое истинное, если существует элемент из множества M , для которого $P(x)$ истинно, и ложно в противном случае.

$$\exists x P(x) \equiv 1 \Leftrightarrow \exists x: P(x) \equiv 1, x \in I_{P(x)} = M$$

$$\exists x P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow P(x) \equiv 0, x \in I_{P(x)} = \emptyset$$

В высказывании $\exists x P(x)$ переменная x связана квантором существования.

3.6. Кванторные операции с n – местными предикатами.

Рассмотрим $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n – местный предикат на некотором предметном множестве M .

Зафиксируем все предметные переменные, кроме переменной x_i :

$$P(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i, \dots, x_n^0)$$

В результате получим одноместный предикат:

$$P(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i, \dots, x_n^0) \equiv P(x_i)$$

Навесим на полученный одноместный предикат квантор общности на i (итую) предметную переменную:

$$\forall x_i P(x_i) \equiv \forall x_i P(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i, \dots, x_n^0) \quad (*)$$

Теперь в выражении $(*)$ перейдём от фиксированных переменных $x_1^0, x_2^0, \dots, x_i, \dots, x_n^0$ к исходным переменным $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$:

$$\forall x_i P(x_i) \equiv \forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

В результате получим $(n-1)$ – местный предикат.

Аналогичным образом происходит «навешивание» квантора существования на n -местный предикат.

Заметим, что при навешивании квантора на предикат, его местность уменьшается на единицу.

3.7. Понятие формулы АЛГЕБРЫ ПРЕДИКАТОВ.

Под формулой АП будем понимать:

- 1) Всякий предикат или предикатную переменную;
- 2) Если два предиката являются формулами, то формулами также являются их отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция, квантор общности, квантор существования:

$$\begin{aligned} P(x), Q(x) - \text{формулы} \Rightarrow \\ \overline{P(x)}, P(x) \wedge Q(x), P(x) \vee Q(x), \\ P(x) \rightarrow Q(x), P(x) \sim Q(x), \forall x P(x), \exists x P(x) \end{aligned}$$

- 3) Других формул, кроме определённых в пунктах 1) и 2) нет.

Формулы АП будем обозначать заглавными латинскими буквами, а в скобках перечислять предметные переменные, входящие в рассматриваемые формулы.

Например: $F \equiv P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$, здесь x – свободная переменная, y – связанная переменная.

Замечание: все равносильности (законы логики) имеют место и для формул АП, так как при подстановке в формулу вместо предметной переменной её значения из предметного множества M формула АП становится формулой АВ.

3.8. Теоремы об областях истинности операций $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim$ предикатов.

Выразим область истинности отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции через области истинности исходных предикатов (на примере одноместных предикатов).

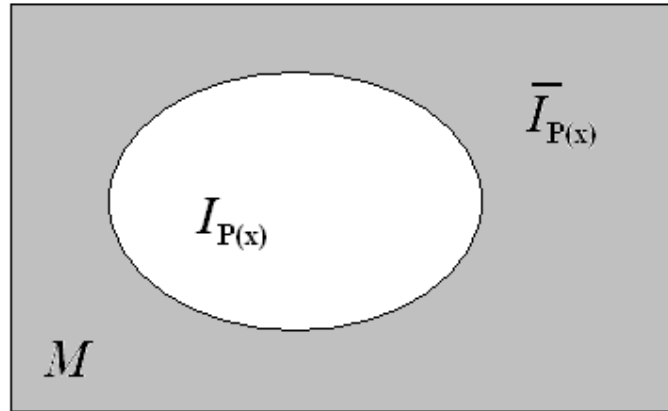
Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – одноместные предикаты, заданные на предметном множестве M .

Теорема 1 (об области истинности отрицания)

$$I_{\overline{P(x)}} = \bar{I}_{P(x)}, P(x): x \in M$$

Доказательство:

Пусть $x \in M, x \in \overline{I_{P(x)}} \Leftrightarrow \overline{P(x)} \equiv 1 \Leftrightarrow P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow x \notin I_{P(x)}$, но $x \in M \Leftrightarrow x \in \overline{I_{P(x)}} \Rightarrow \overline{I_{P(x)}} = \bar{I}_{P(x)}$



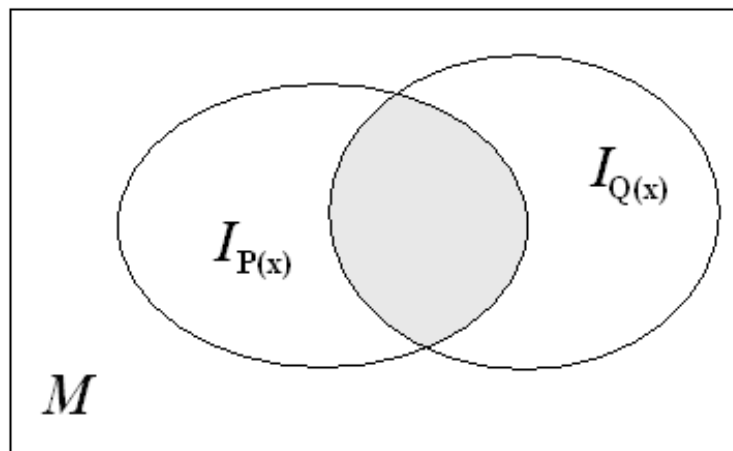
$$M = I_{P(x)} \cup \bar{I}_{P(x)}$$

Теорема 2 (об области истинности конъюнкции)

$$I_{P(x) \wedge Q(x)} = I_{P(x)} \cap I_{Q(x)}, P(x), Q(x): x \in M$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} a \in M, a \in I_{P(x) \wedge Q(x)} &\Leftrightarrow P(a) \wedge Q(a) \equiv 1 \Leftrightarrow P(a) \equiv 1 \text{ и } Q(a) \equiv 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \in I_{P(x)} \text{ и } a \in I_{Q(x)} \Leftrightarrow a \in (I_{P(x)} \cap I_{Q(x)}) \end{aligned}$$

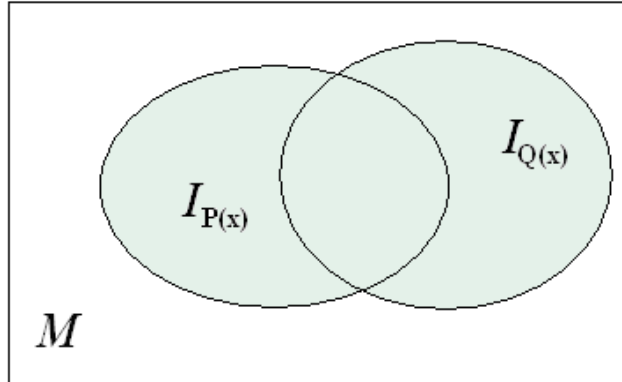


Теорема 3 (об области истинности дизъюнкции)

$$I_{P(x) \vee Q(x)} = I_{P(x)} \cup I_{Q(x)}, P(x), Q(x): x \in M$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} a \in M, a \in I_{P(x) \vee Q(x)} &\Leftrightarrow P(a) \vee Q(a) \equiv 1 \Leftrightarrow P(a) \equiv 1 \text{ или } Q(a) \equiv 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \in I_{P(x)} \text{ или } a \in I_{Q(x)} \Leftrightarrow a \in (I_{P(x)} \cup I_{Q(x)}) \end{aligned}$$



Поскольку после подстановки в предикат вместо предметной переменной её конкретное значение, он обращается в высказывание, а для высказывания справедливы законы логики, то эти же законы будут справедливы и для предикатов.

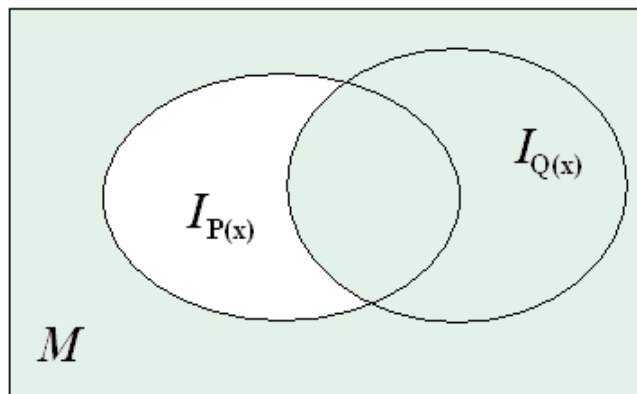
Воспользуемся законами логики для доказательства следующих теорем:

Теорема 4 (об области истинности импликации)

$$I_{P(x) \rightarrow Q(x)} = \overline{I_{P(x)}} \cup I_{Q(x)}, P(x), Q(x): x \in M$$

Доказательство: рассмотрим левую часть теоремы

$$I_{P(x) \rightarrow Q(x)} = I_{\overline{P(x)} \vee Q(x)} = (\text{по Т. 3}) = \overline{I_{P(x)}} \cup I_{Q(x)} = (\text{по Т. 1}) = \overline{I_{P(x)}} \cup I_{Q(x)}$$

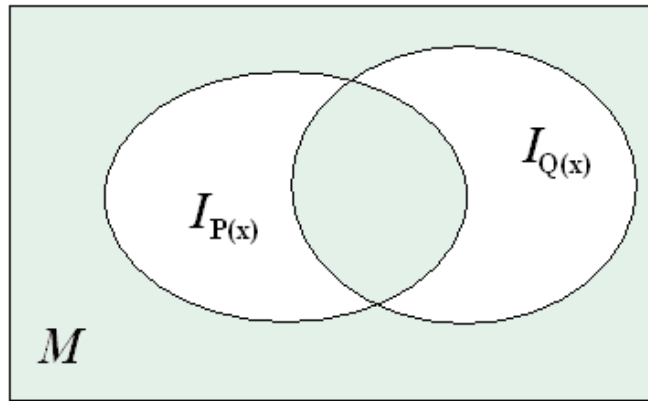


Теорема 5 (об области истинности эквиваленции)

$$I_{P(x) \sim Q(x)} = (I_{P(x)} \cap I_{Q(x)}) \cup (\overline{I_{P(x)}} \cap \overline{I_{Q(x)}}), P(x), Q(x): x \in M$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} I_{P(x) \sim Q(x)} &= I_{(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow P(x))} = I_{(\overline{P(x)} \vee Q(x)) \wedge (\overline{Q(x)} \vee P(x))} = \\ &= I_{(\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}) \vee \underbrace{(\overline{P(x)} \wedge P(x))}_{\equiv 0} \vee \underbrace{(Q(x) \wedge \overline{Q(x)})}_{\equiv 0} \vee (Q(x) \wedge P(x))} = \\ &= I_{(\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}) \vee (Q(x) \wedge P(x))} = (\text{по Т. 3}) = I_{(Q(x) \wedge P(x))} \cup I_{(\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)})} = \\ &= (\text{по Т. 2}) = (I_{P(x)} \cap I_{Q(x)}) \cup (\overline{I_{P(x)}} \cap \overline{I_{Q(x)}}) = (\text{по Т. 1}) = \\ &= (I_{P(x)} \cap I_{Q(x)}) \cup (\overline{I_{P(x)}} \cap \overline{I_{Q(x)}}) \end{aligned}$$



Пример:

Найти область истинности, если $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1) $P(x) \wedge \overline{Q(x)}$

2) $P(x) \rightarrow Q(x)$

$$P(x) = "x : 2",$$

$$Q(x) = "x - \text{простое число}"$$

Решение.

$$I_{P(x)} = \{2, 4\},$$

$$I_{Q(x)} = \{2, 3, 5\}$$

$$I_{P(x) \wedge \overline{Q(x)}} = I_{P(x)} \cap \overline{I_{Q(x)}} = \{2, 4\} \cap \{1, 4\} = \{4\}$$

$$I_{P(x) \rightarrow Q(x)} = I_{\overline{P(x)} \vee Q(x)} = \overline{I_{P(x)}} \cup I_{Q(x)} = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$$

Задача.

Определить истинность предиката:

$$\forall x \left(\underbrace{(x^2 - 2x > 0)}_{P(x)} \wedge \underbrace{(x^2 - 3x > 0)}_{Q(x)} \right) \text{ на множестве действительных}$$

чисел.

Решение.

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x S(x)$$

$$x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x \cdot (x - 2) > 0$$

$$I_{P(x)} = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$$



$$x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x \cdot (x - 3) > 0$$

$$I_{Q(x)} = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$$



$$\begin{aligned} I_{S(x)} &= I_{P(x) \wedge Q(x)} = (\text{по Т. 2}) = I_{P(x)} \wedge I_{Q(x)} = I_{P(x)} \cap I_{Q(x)} = \\ &= ((-\infty; 0) \cup (2; +\infty)) \cap ((-\infty; 0) \cup (3; +\infty)) = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty) \neq \mathbb{R} \Rightarrow \\ &\Rightarrow S(x) \not\equiv 1 \Rightarrow \forall x S(x) \equiv 0 \end{aligned}$$

3.9. Свойства кванторных операций над предикатами.

Две формулы алгебры предикатов называются равносильными на предметной области M , если они принимают одинаковые значения истинности, на каждом наборе предметных переменных, отнесённых к области M .

Формулы называются равносильными, если они равносильны на любой предметной области.

1) Коммутативность одноимённых кванторов

$$\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$$

$$\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$$

2) Разноимённые кванторы не коммутируют

$$\forall x \exists y P(x, y) \not\equiv \exists y \forall x P(x, y)$$

Доказывается методом «от противного»:

Предположим, что разноимённые кванторы коммутируют, и приведём контр пример.

$$P(x, y) = "x:y", \{x, y\} \in M = N \setminus \{1\}$$

$$\forall x \exists y (x : y) \equiv 1$$

$$\exists y \forall x (x : y) \equiv 0$$

$$1 \not\equiv 0 \Rightarrow \text{кванторы не коммутируют}$$

3) Вынесение квантора за знак отрицания

$$\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)}$$

$$\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}$$

Докажем второй случай:

$$\begin{aligned} \text{предположим, что } \overline{\exists x P(x)} \equiv 1 &\Leftrightarrow \exists x P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \overline{P(x)} \equiv 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x \overline{P(x)} \equiv 1 \end{aligned}$$

4) Вынесение квантора общности за знак конъюнкции

$$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv 1 &\Leftrightarrow P(x) \wedge Q(x) \equiv 1 \Leftrightarrow P(x) \equiv 1 \text{ и } Q(x) \equiv 1 \Leftrightarrow \\ \forall x P(x) \equiv 1 \text{ и } \forall x Q(x) \equiv 1 &\Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv 1 \end{aligned}$$

5) Вынесение квантора общности за знак дизъюнкции в исключительном случае

$$\forall x P(x) \vee Q(y) \equiv \forall x (P(x) \vee Q(y))$$

Q - не зависит от предметной переменной x

Доказательство:

$$\begin{aligned} 1. Q(y) \equiv 1 &\Rightarrow \forall x P(x) \vee Q(y) \equiv \forall x P(x) \vee 1 \equiv 1 \\ \forall x (P(x) \vee Q(y)) &\equiv \forall x (P(x) \vee 1) \equiv \forall x (1) \equiv 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 \equiv 1$$

$$2. Q(y) \equiv 0 \Rightarrow \forall x P(x) \vee Q(y) \equiv \forall x P(x) \vee 0 \equiv \forall x P(x)$$

$$\forall x (P(x) \vee Q(y)) \equiv \forall x (P(x) \vee 0) \equiv \forall x P(x)$$

$$\Rightarrow \forall x P(x) \equiv \forall x P(x)$$

Как следствие: $\forall x P(x) \vee Q(y) \equiv \forall x (P(x) \vee Q(y))$

6) Вынесения квантора существования за знак дизъюнкции

$$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

Доказательство проводится аналогично п. 4), предполагая, что правая часть вначале ложна: $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv 0$

7) Вынесение квантора существования за знак конъюнкции в исключительном случае

$$\exists x P(x) \wedge G(y) \equiv \exists x (P(x) \wedge G(y))$$

G - не зависит от предметной переменной x

Доказательство проводится аналогично п. 5)

8) Независимость формул от связанных переменных

$$\forall x P(x) \equiv \forall y P(y)$$

$$\exists x P(x) \equiv \exists y P(y)$$

9) Законы поглощения кванторов

$$\forall y P(x) \equiv P(x)$$

$$\exists y P(x) \equiv P(x)$$

3.10. Классификация формул АЛГЕБРЫ ПРЕДИКАТОВ.

Пусть M – область определения для формулы $F(x)$ алгебры предикатов, содержащей одну или набор переменных.

Формула $F(x)$ алгебры предикатов называется выполнимой в области M , если существуют значения переменных, входящих в эту формулу и отнесённых к области M , при которых эта формула принимает истинные значения.

Формула $F(x)$ алгебры предикатов называется выполнимой, если существует предметная область, на которой эта формула выполнима.

Формула $F(x)$ алгебры предикатов называется тождественно-истинной в области M , если она принимает истинные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесённых к этой области.

Формула $F(x)$ алгебры предикатов называется общезначимой, если она тождественно истинна на всякой предметной области.

Формула $F(x)$ алгебры предикатов называется тождественно-ложной в области M , если она принимает ложные значения для всех значений переменных, входящих в эту формулу и отнесённых к этой области.

Формула $F(x)$ алгебры предикатов называется тождественно-ложной (невыполнимой), если она тождественно ложна на всякой области.

Пример: доказать, что формула является общезначимой.

$$F(x) \equiv \forall x (P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}$$

Решение.

$$\begin{aligned} F(x) &\equiv \forall x (P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv \\ &\equiv \overline{\forall x (P(x) \vee \overline{Q(x)})} \vee \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv \\ &\equiv \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x \overline{P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv \\ &\equiv \exists x [(P(x) \wedge Q(x)) \vee \overline{Q(x)}] \vee \forall x \overline{P(x)} \equiv \\ &\equiv \exists x [(P(x) \vee \overline{Q(x)}) \wedge \underbrace{(Q(x) \vee \overline{Q(x)})}_{\equiv 1}] \vee \forall x \overline{P(x)} \equiv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\equiv \exists x (P(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \forall x \overline{P(x)} \equiv \exists x P(x) \vee \exists x \overline{Q(x)} \vee \forall x \overline{P(x)} \equiv \\ &\equiv \exists x P(x) \vee \exists x \overline{Q(x)} \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv \underbrace{(\exists x P(x) \vee \overline{\exists x P(x)})}_{\equiv 1} \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv 1 \end{aligned}$$

Поскольку результат не зависит от выбора предметной области, получаем, что рассматриваемая формула является общезначимой.

3.11. Нормальные формулы алгебры предикатов.

В АП, как и в АВ, формулы могут иметь нормальную форму, то есть существуют эквивалентные нормальные формы представления любых предикатных формул. При этом, используя равносильности АВ и АП, каждую формулу АП можно привести к нормальной форме. В АП различают два вида нормальных форм: приведённую и предварённую.

1. Приведённая форма формул АЛГЕБРЫ ПРЕДИКАТОВ.

Определение Говорят, что формула алгебры предикатов записана в виде приведённой формы, если она не содержит операции импликации и эквиваленции, а операция отрицание относится, лишь к элементарным формулам.

Теорема: Всякую формулу алгебры предикатов можно привести к приведённой форме.

Доказательство: *для доказательства представим алгоритм получения такой формы.*

1) В рассматриваемой формуле исключим операции импликация и эквиваленция, согласно законам логики.

2) Если в результате операция отрицание относится не к элементарным формулам, то используя законы де Моргана и законы вынесения кванторов за знак отрицания, добьёмся того, чтобы операция отрицание относилась, лишь к элементарным формулам.

Пример 1:

$$(\exists x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)) \rightarrow R(z) \equiv (\overline{\exists x P(x) \vee \forall y Q(y)}) \vee R(z) \equiv$$

$$\equiv \overline{\exists x P(x)} \wedge \overline{\forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z)$$

Получили приведённую нормальную форму исходной формулы.

Пример 2:

$$\begin{aligned} & \overline{\forall x \exists y P(x, y) \sim \exists y \forall x Q(x, y)} \equiv \\ & \equiv \overline{\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x Q(x, y) \wedge \exists y \forall x Q(x, y) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)} \equiv \\ & \equiv \overline{\forall x \exists y P(x, y) \vee \exists y \forall x Q(x, y) \wedge \exists y \forall x Q(x, y) \vee \forall x \exists y P(x, y)} \equiv \\ & \equiv (\forall x \exists y P(x, y) \wedge \exists y \forall x \overline{Q(x, y)}) \vee (\exists y \forall x Q(x, y) \wedge \forall x \exists y \overline{P(x, y)}) \equiv \end{aligned}$$

II. Предварённая (префиксная, пренексная) нормальная форма формул АЛГЕБРЫ ПРЕДИКАТОВ (ПНФ).

ПНФ – называется форма следующего вида:

$$\sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \dots \sigma_{x_m} F(x_1, x_2, \dots, x_n), m \leq n, \{m, n\} \in N, \sigma_{x_i} \in \{\forall x_i \text{ или } \exists x_i\}, i = \overline{1, m}$$

Под символом σ_{x_i} понимается один из кванторов $\forall x_i$ или $\exists x_i$, а формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - приведённая нормальная форма не содержит кванторов.

В ПНФ кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо они выполняются после всех операций алгебры высказываний.

Теорема: Всякую формулу алгебры предикатов можно привести ПНФ

Процедура получения (приведения) ПНФ состоит в следующем:

1. Используя формулы (отнесённые к предикатам), заменить операции импликация и эквиваленция через операции конъюнкция и дизъюнкция.
2. Используя формулы алгебры предикатов, а так же формулы алгебры высказываний, представить предикатную формулу таким образом, чтобы символы отрицания относились непосредственно к символам предикатов (и, таким образом, мы приводим исходную формулу к приведённой форме).

3. Для формул, содержащих подформулы вида $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$, $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$, ввести новые переменные, позволяющие использовать основные равносильности алгебры предикатов.

Примеры: Привести к ПНФ формулу:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad & \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y Q(x, y) \equiv \overline{\forall x \exists y P(x, y)} \vee \exists x \forall y Q(x, y) \equiv \\
 & \equiv \exists x \forall y \overline{P(x, y)} \vee \exists x \forall y Q(x, y) \equiv \exists x \left(\forall y \overline{P(x, y)} \vee \forall y Q(x, y) \right) \equiv \\
 & \equiv \text{переименуем переменную } y \text{ через переменную } z \text{ в предикате } Q(x, y) \equiv \\
 & \equiv \exists x \left(\forall y \overline{P(x, y)} \vee \forall z Q(x, z) \right) \equiv \exists x \forall y \forall z \left(\overline{P(x, y)} \vee Q(x, z) \right) \equiv \text{ПНФ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [2] \quad & \exists x \forall y P(x, y) \vee \overline{\forall x \exists y Q(x, y)} \equiv \exists x \forall y P(x, y) \vee \exists x \forall y \overline{Q(x, y)} \equiv \\
 & \equiv \exists x \left(\forall y P(x, y) \vee \forall y \overline{Q(x, y)} \right) \equiv \\
 & \equiv (\text{обозначим в предикате } Q \text{ переменную } y \text{ через } z \equiv \\
 & \equiv \exists x \left(\forall y P(x, y) \vee \forall z \overline{Q(x, z)} \right) \equiv \exists x \forall y \forall z \left(P(x, y) \vee \overline{Q(x, z)} \right) \equiv \text{ПНФ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [3] \quad & \overline{\exists x \forall y P(x, y) \wedge \exists x \forall y Q(x, y)} \equiv \overline{\exists x \forall y P(x, y)} \vee \overline{\exists x \forall y Q(x, y)} \equiv \\
 & \equiv \forall x \exists y \overline{P(x, y)} \vee \forall x \exists y \overline{Q(x, y)} \equiv \\
 & \equiv (\text{обозначим в предикате } Q \text{ переменную } x \text{ через } z \equiv \\
 & \equiv \forall x \exists y \overline{P(x, y)} \vee \forall z \exists y \overline{Q(z, y)} \equiv \forall x \forall z \left[\exists y \overline{P(x, y)} \vee \exists y \overline{Q(z, y)} \right] \equiv \\
 & \equiv \forall x \forall z \exists y \left[\overline{P(x, y)} \vee \overline{Q(z, y)} \right] \equiv \text{ПНФ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [4] \quad & \forall x \forall y \left(\exists z (P(x, z) \wedge Q(y, z)) \right) \rightarrow \exists u R(x, y, u) \equiv \\
 & \equiv \forall x \forall y \left(\overline{\exists z (P(x, z) \wedge Q(y, z))} \right) \vee \exists u R(x, y, u) \equiv \\
 & \equiv \forall x \forall y \left(\forall z \left(\overline{P(x, z) \wedge Q(y, z)} \right) \right) \vee \exists u R(x, y, u) \equiv \\
 & \equiv \forall x \forall y \left(\forall z \left(\overline{P(x, z)} \vee \overline{Q(y, z)} \right) \right) \vee \exists u R(x, y, u) \equiv \\
 & \equiv (\text{предикат } R(x, y, u) \text{ не зависит от переменной } z) \equiv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \forall x \forall y \forall z \left((P(x, z) \vee Q(y, z)) \vee \exists u R(x, y, u) \right) \equiv \\
&\equiv (\text{предикаты } P(x, z) \text{ и } Q(y, z) \text{ не зависят от переменной } u) \equiv \\
&\equiv \forall x \forall y \forall z \exists u (P(x, z) \vee Q(y, z) \vee R(x, y, u)) \equiv \text{ПНФ} \\
\boxed{5} \quad &(\overline{\exists u P(u)} \rightarrow \overline{\forall y \forall u Q(y, u)}) \rightarrow \forall x R(x) \equiv \\
&\equiv \overline{(\overline{\exists u P(u)} \vee \overline{\forall y \forall u Q(y, u)})} \vee \forall x R(x) \equiv \\
&\equiv \overline{\exists u P(u)} \wedge \overline{\forall y \forall u Q(y, u)} \vee \forall x R(x) \equiv \\
&\equiv \forall u \overline{P(u)} \wedge \forall y \forall u Q(y, u) \vee \forall x R(x) \equiv \\
&\equiv \forall x \forall y \forall u (\overline{P(u)} \wedge Q(y, u) \vee R(x)) \equiv \text{ПНФ}
\end{aligned}$$

3.12. Проблема разрешимости для формул АЛГЕБРЫ ПРЕДИКАТОВ.

Проблема разрешимости в алгебре предикатов ставится так же, как и в алгебре высказываний: *существуют ли алгоритмы, позволяющие для любой формулы АП установить к какому типу (классу) она относится.*

Формулы АП образуют три класса:

- 1) выполнимые формулы;
- 2) общезначимые формулы;
- 3) тождественно-ложные формулы.

Под проблемой разрешимости понимают проблему отнесения формулы АП к тому или иному классу.

Если бы такой алгоритм существовал, то, как и в АВ, он сводился бы к критерию тождественной истинности любой формулы АП. Однако, в отличие от АВ, в АП не применим метод перебора всех вариантов значений переменных, входящих в формулу, так как таких вариантов может быть бесконечное множество.

3.13. Тезис Чёрча.

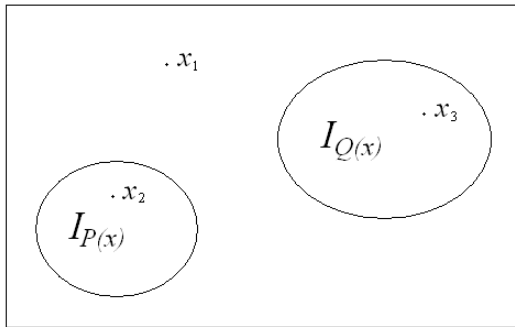
Проблема разрешимости в АП в общем случае неразрешима.

Алонзо Чёрч (англ. Alonzo Church; 14 июня 1903 года, Вашингтон — 11 августа 1995 года, Хадсон, Огайо, США) — американский математик и логик, внесший значительный вклад в основы информатики. Получил степень бакалавра искусств в Принстонском университете в 1924 году.

3.14. Теорема, необходимые и достаточные условия.

Рассмотрим два предиката $P(x), Q(x)$, определённых на множестве M , и выясним, в каком отношении должны быть их области истинности так, чтобы: $P(x) \rightarrow Q(x) \equiv 1, x \in M$

1) $I_{P(x)} \cap I_{Q(x)} = \emptyset$



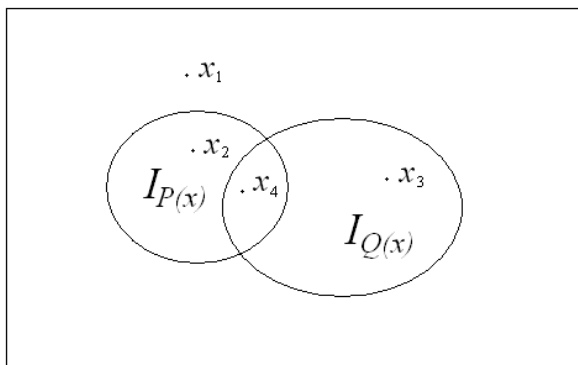
$$P(x_2) \rightarrow Q(x_2) \equiv 1 \rightarrow 0 \equiv 0$$

$$P(x_1) \rightarrow Q(x_1) \equiv 0 \rightarrow 0 \equiv 1$$

$$P(x) \rightarrow Q(x) \not\equiv 1$$

При таком расположении областей истинности импликация данных предикатов не будет тождественно истинной.

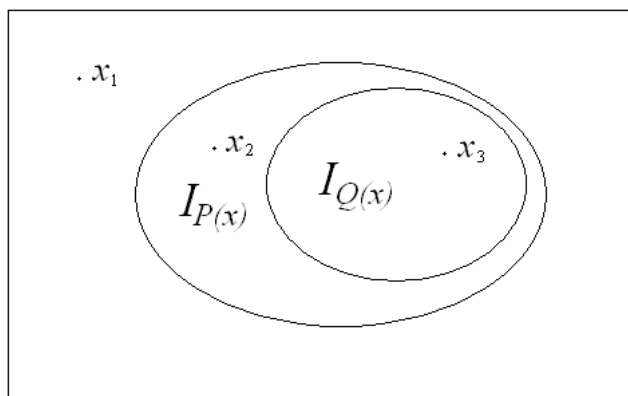
2) $I_{P(x)} \cap I_{Q(x)} \neq \emptyset$



$$P(x_2) \rightarrow Q(x_2) \equiv 1 \rightarrow 0 \equiv 0$$

$$P(x) \rightarrow Q(x) \not\equiv 1$$

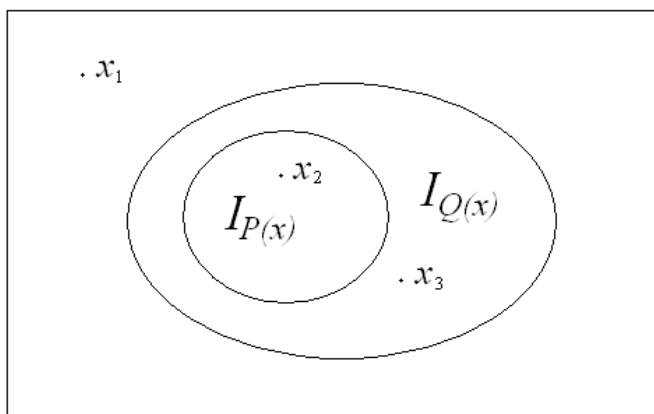
$$3) I_{Q(x)} \subset I_{P(x)}$$



$$P(x_2) \rightarrow Q(x_2) \equiv 1 \rightarrow 0 \equiv 0$$

$$P(x) \rightarrow Q(x) \neq 1$$

$$4) I_{P(x)} \subset I_{Q(x)}$$



$$P(x_1) \rightarrow Q(x_1) \equiv 0 \rightarrow 0 \equiv 1$$

$$P(x_2) \rightarrow Q(x_2) \equiv 0 \rightarrow 1 \equiv 0$$

$$P(x_3) \rightarrow Q(x_3) \equiv 1 \rightarrow 1 \equiv 1$$

$$P(x) \rightarrow Q(x) \equiv 1, x \in M$$

Теорема:

Импликация двух предикатов тождественно истинна, если область истинности условия не превосходит в область истинности заключения.

$$P(x) \rightarrow Q(x) \equiv 1, x \in M, \text{ если } I_{P(x)} \subseteq I_{Q(x)} \Rightarrow$$

$$1) P(x) \rightarrow Q(x) \equiv 1, x \in M, \text{ если } I_{P(x)} \subset I_{Q(x)}$$

$$2) \left. \begin{array}{l} P(x) \rightarrow Q(x) \equiv 1 \\ Q(x) \rightarrow P(x) \equiv 1 \end{array} \right\}, x \in M \Leftrightarrow I_{P(x)} = I_{Q(x)}$$

Рассмотрим различные ситуации для операции импликация:

1) $P(x) \rightarrow Q(x) \equiv 1, x \in M$, то говорят, что предикат $Q(x)$ является необходимым условием для предиката $P(x)$, а предикат $P(x)$ является достаточным условием для предиката $Q(x)$, или говорят, что предикат $Q(x)$ следует из предиката $P(x)$.

2) $\left. \begin{array}{l} P(x) \rightarrow Q(x) \equiv 1 \\ Q(x) \rightarrow P(x) \equiv 1 \end{array} \right\}$, то говорят, что предикат $P(x)$ для предиката $Q(x)$ ($Q(x)$ для $P(x)$) является и необходимым и достаточным условием. В этом случае говорят, что оба предиката тождественно равны на заданном предметном множестве.

$$P(x) \equiv Q(x), x \in M$$

3.15. Виды теорем.

Под теоремой понимают математическое утверждение, истинность которого устанавливается доказательством.

Чаще всего теоремы формулируют в имплицитивной форме, то есть с помощью фразы: «если {условие}, то {заключение}».

Общий вид теорем:

$$\underbrace{(\forall x \in M)}_{\text{разъяснительная часть}} \left(\underbrace{P(x)}_{\text{условие}} \rightarrow \underbrace{Q(x)}_{\text{заключение}} \right) \quad (1)$$

Теоремы вида (1) будем называть прямой теоремой.

$$(\forall x \in M) (Q(x) \rightarrow P(x)) \quad (2) \text{ – обратная теорема к (1)}$$

$$(\forall x \in M) (\overline{P(x)} \rightarrow \overline{Q(x)}) \quad (3) \text{ – противоположная теорема к (1)}$$

$$(\forall x \in M) (\overline{Q(x)} \rightarrow \overline{P(x)}) \quad (4) \text{ – обратная теорема к противоположной теореме}$$

Заметим, что теоремы (1) и (2) не являются одновременно истинными, однако существуют пары теорем, которые всегда одновременно истинны или ложны.

Согласно закону контрапозиции пары $\{(1); (4)\}$ и $\{(2); (3)\}$ одновременно являются истинными.

Сформулируем прямую теорему, учитывая истинность прямой и обратной теорем, с помощью необходимых и достаточных условий:

1) Пусть теорема (1) $\equiv 1$, а теорема (2) $\equiv 0$, тогда предикат $Q(x)$ является необходимым, но не достаточным условием для предиката $P(x)$ и наоборот, $P(x)$ является достаточным, но не необходимым для $Q(x)$.

“Для того чтобы $P(x)$ необходимо, но не достаточно чтобы $Q(x)$.”

2) Пусть теорема (1) $\equiv 0$, а теорема (2) $\equiv 1$, тогда предикат $Q(x)$ является достаточным, но не необходимым условием для предиката $P(x)$ и наоборот, $P(x)$ является необходимым, но не достаточным для $Q(x)$.

“Для того чтобы $P(x)$, достаточно, но не необходимо чтобы $Q(x)$.”

3) Пусть теорема (1) $\equiv 1$, а теорема (2) $\equiv 1$, тогда предикат $Q(x)$ является необходимым и достаточным условием для предиката $P(x)$ и наоборот.

В этом случае, ***“для того чтобы $P(x)$ необходимо и достаточно чтобы $Q(x)$.”***

Здесь прямую и обратную теорему объединяют в одну с помощью выше указанной фразы или с помощью фразы «тогда и только тогда, когда», такие теоремы называются критериями или признаками.

3.16. Метод доказательства «от противного».

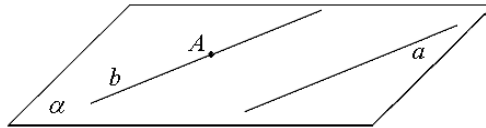
Метод доказательства от противного устроен так: предполагают, что заключение теоремы (1) неверно и если в результате доказательства получают противоречие с условием теоремы (1), то есть доказывают что истинным является предикат $\overline{P(x)}$, то тем самым доказывают истинность импликации (4), но, а, значит, согласно закону контрапозиции, истинность теоремы (1).

Пример:

Теорема. Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.

$$\forall A \notin a \exists! b: A \in b \wedge b \parallel a$$

Доказательство.



Дано: a – прямая, $A \notin a \Rightarrow \exists \alpha: A \in \alpha \wedge a \in \alpha$

$$\exists b \in \alpha: b \parallel a \wedge A \in b$$

Пусть $\exists b_1 \in \alpha: b_1 \parallel a \wedge A \in b_1 \Rightarrow (a \parallel b_1) \in \alpha_1 \Rightarrow a \in \alpha_1 \wedge A \in \alpha_1: \alpha_1 \neq \alpha \Rightarrow$

$\exists c = \alpha_1 \mid \alpha: a \subset c \wedge A \in c \Rightarrow A \in a$ – что противоречит условию теоремы.

3.17. Выражение кванторных операций через логические операции.

Пусть множество M – конечно и содержит элементы $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, пусть предикат $P(x)$ определён на множестве M , тогда имеет место следующая равносильность:

$$P(x): x \in M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \Rightarrow$$

$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n) \quad (1)$$

$$\exists x P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n) \quad (2)$$

Доказательство (1): рассмотрим левую часть равносильности, полагая, что $\forall x P(x) \equiv 1 \Leftrightarrow P(x) \equiv 1, x \in M \Leftrightarrow P(x_i) \equiv 1, i = \overline{1, n} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n) \equiv 1$

Доказательство (2): предположим, что левая часть равносильности тождественно равна нулю $\exists x P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow P(x) \equiv 0, x \in M \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(x_i) \equiv 0, i = \overline{1, n} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n) \equiv 0$$

4. РАССУЖДЕНИЯ.

4.1. Рассуждения. Критерий правильности рассуждений

Рассуждением называются такие логические действия, с помощью которых из одного или нескольких исходных предложений получают новое предложение, имеющее новое значение, при этом исходные предложения называются посылками рассуждения и обозначаются $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, а новое предложение называется заключением рассуждения и обозначается Φ .

Рассуждения бывают правильные и не правильные.

Рассуждения называются правильными, если из истинных посылок нельзя получить ложное заключение в результате рассуждений, в противном случае – неправильными.

Обозначают правильные рассуждения:

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \Phi$$

Теорема: (критерий правильности рассуждений)

Рассуждение правильное тогда и только тогда, когда импликация конъюнкции посылок и рассуждения тождественно истинна.

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \Phi \Leftrightarrow \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \Phi \equiv 1$$

Доказательство:

необходимость: Пусть рассуждения правильные. Это означает, что

$$\varphi_i \equiv 1 \Rightarrow \Phi \equiv 1 (i = \overline{1, n})$$

составим формулу:

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \Phi \equiv 1 \wedge 1 \wedge \dots \wedge 1 \rightarrow 1 \equiv 1$$

достаточность: Пусть $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \Phi \equiv 1$, и $\varphi_i \equiv 1 (i = \overline{1, n})$

Это означает, что

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \Phi \equiv 1 \wedge 1 \wedge \dots \wedge \Phi \rightarrow 1 \equiv 1 \wedge \Phi \rightarrow 1 \equiv 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi \equiv 1$$

4.2. Правило вывода.

Под правилом вывода понимают правила, с помощью которых могут быть получены правильные рассуждения, поэтому правила вывода записывают в виде дроби:

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n}{\Phi}$$

Существуют четыре правила вывода:

1) правило заключения:

$$\frac{P(x) \rightarrow Q(x), P(a)}{Q(a)}$$

Пример:

$P(x)$ = "студент x решил задачу", $Q(x)$ = "студент x получил зачёт"
 a = "Иванов"

2) правило отрицания:

$$\frac{P(x) \rightarrow Q(x), \overline{P(a)}}{\overline{Q(a)}}$$

3) правило контрапозиции:

$$\frac{P(x) \rightarrow Q(x)}{\overline{P(x)} \rightarrow \overline{Q(x)}}$$

4) правило силлогизма:

$$\frac{P(x) \rightarrow Q(x), Q(x) \rightarrow S(x)}{P(x) \rightarrow S(x)}$$

Покажем, что данное правило действительно приводит к правильному рассуждению на основании критерия:

$$\varphi_1 \equiv P(x) \rightarrow Q(x)$$

$$\varphi_2 \equiv Q(x) \rightarrow S(x)$$

$$\Phi \equiv P(x) \rightarrow S(x)$$

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \Phi \equiv 1$$

$$(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow S(x)) \rightarrow (P(x) \rightarrow S(x)) \equiv$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \overline{\left(\overline{P(x)} \vee Q(x)\right) \wedge \left(\overline{Q(x)} \vee S(x)\right)} \vee \left(\overline{P(x)} \vee S(x)\right) \equiv \\
&\equiv \left(\overline{\overline{P(x)} \vee Q(x)}\right) \vee \left(\overline{\overline{Q(x)} \vee S(x)}\right) \vee \left(\overline{P(x)} \vee S(x)\right) \equiv \\
&\equiv \left(\overline{\overline{P(x)}} \wedge \overline{Q(x)}\right) \vee \left(\overline{\overline{Q(x)}} \wedge \overline{S(x)}\right) \vee \left(\overline{P(x)} \vee S(x)\right) \equiv \\
&\equiv \left(P(x) \wedge \overline{Q(x)}\right) \vee \left(Q(x) \wedge \overline{S(x)}\right) \vee \left(\overline{P(x)} \vee S(x)\right) \equiv 1
\end{aligned}$$

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Простые и составные высказывания. Высказывательные переменные. Основные логические связки. Логические операции над высказываниями.
2. Формулы и их логические возможности. Равносильные формулы. Теорема об отношении $\equiv$ (равносилие).
3. Тавтологии и противоречия. Таблицы истинности. Теорема о тавтологии. Законы логики.
4. Алгебра Буля. Булевы функции.
5. Теоремы о двойственных формулах.
6. Полные системы связок (определение, свойства, теорема о связке «отрицания»).
7. Описание п.с.с. Теоремы о множествах, являющихся и не являющихся полными системами связок.
8. Одноэлементные п.с.с., теорема.
9. Построение формул по заданным таблицам истинности.
10. Применение алгебры высказываний к релейно-контактным схемам.
11. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Теорема об элементарной дизъюнкции (конъюнкции).
12. Критерии тождественной истинности (ложности) формулы.
13. С.Д.Н.Ф и С.К.Н.Ф. формы.
14. Проблема разрешимости формул АВ.
15. Свойство операции сравнимости по модулю два.
16. Полиномы Жегалкина. Монотонные функции.
17. Формальные и содержательные аксиоматические теории. Принцип построения формальных аксиоматических теорий. Язык ИВ. Аксиомы и правила вывода ИВ.
18. Доказуемость и выводимость из гипотез. Теорема о теоремах ИВ.
19. Свойства выводимости из гипотез. Вывод формулы $A \rightarrow A$.
20. Теорема дедукции.
21. Правило силлогизма и правило исключения промежуточной посылки, закон перестановки посылок.
22. Закон противоречивой посылки, закон контрапозиции. Обобщённое правило противоречивой посылки.
23. Полнота ИВ относительно АВ.
24. Непротиворечивость и разрешимость ИВ.
25. Высказывательные формы. Определение, логические возможности и таблица истинности предиката. Способы задания предиката, предикатные переменные, область истинности предиката.
26. Логические и кванторные операции над предикатами.
27. Области истинности предикатов. Теорема об области истинности отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции.
28. Определение формулы алгебры предикатов. Классификация формул. Проблема разрешимости формул АП.
29. Кванторы как обобщение логических операций.

- 30. Независимость формул от связанных переменных. Вынесение отрицания за кванторы.
- 31. Вынесение кванторов за операции конъюнкции и дизъюнкции.
- 32. Перестановка кванторов.
- 33. Приведённая форма для формул алгебры высказываний. Теорема.
- 34. Предварённая нормальная форма. Теорема.
- 35. Прямые и обратные теоремы, метод доказательства «от противного».
- 36. Необходимые и достаточные условия, теорема.
- 37. Виды теорем.
- 38. Метод доказательства «от противного».
- 39. Правильные и неправильные рассуждения. Критерий правильности рассуждений. Правила вывода.
- 40. Математические теории первого рода, основные понятия, принцип построения, примеры.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Битюцкий, В. П. Математическая логика. Исчисление высказываний и предикатов / В. П. Битюцкий, Н. В. Папуловская – Екатеринбург: УГТУ, 2005. – 116с. – Текст: непосредственный.
2. Гохман, А. В. Сборник задач по математической логике и алгебре множеств / А. В. Гохман, М. А. Спивак, В. В. Розен. – Саратов: СГУ, 1969. - 87с. - Текст: непосредственный.
3. Гиндикин, С. Г. Алгебра логики в задачах / С. Г. Гиндикин. – Москва: Наука, 1972. – 288с. - Текст: непосредственный.
4. Математическая логика: учебно-методическое пособие / И. А. Гусева, А. В. Игнатова, О. А. Перепёлкина, Н. А. Поляков. – Ростов на Дону: ИПО ПИ ЮФУ, 2009. - 68с. - Текст: непосредственный.
5. Ерусалимский, Я. М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения / Я. М. Ерусалимский. – Москва: Вузовская книга, 2001. – 288с. - Текст: непосредственный.
6. Игоршин, В. И. Математическая логика и теория алгоритмов / В. И. Игоршин. – Москва: Академия, 2004. – 124с. - Текст: непосредственный.
7. Игоршин, В. И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов / В. И. Игоршин. – Москва: Академия, 2005. – 304с. - Текст: непосредственный.
8. Колмогоров, А. Н. Введение в математическую логику / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин. – Москва: МГУ, 1982. – 120с. - Текст: непосредственный.
9. Лавров, И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. – Москва: Наука, 1975. – 256с. - Текст: непосредственный.
10. Лихтарников, Л. М. Математическая логика. – Санкт-Петербург: Лань, 1998. – 148с. - Текст: непосредственный.
11. Мендельсон, Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон. – Москва: Наука, 1971. – 322с. - Текст: непосредственный.
12. Никольская, И. Л. Математическая логика / И. Л. Никольская. – Москва: Высшая школа, 1981. – 127с. - Текст: непосредственный.
13. Эдельман, С. Л. Математическая логика / С. Л. Эдельман. – Москва: Высшая школа, 1975. – 176с. - Текст: непосредственный.
14. Барский, А. Б. Нейронные сети: распознавание, управление, принятие решений. / А. Б. Барский — Москва: Финансы и статистика, 2004. — 176 с: ил. — (Прикладные информационные технологии). - Текст: непосредственный.
15. Солдатова, О. П. Основы нейроинформатики : [электронное учебное пособие] / О. П. Солдатова. – Самара: СГАУ, 2006. - 132 с. - Режим доступа: <http://rucont.ru/efd/176442>
16. Хайкин, С. Нейронные сети: полный курс / С. Хайкин; пер. с англ. - 2-е изд. – Москва: Вильямс, 2006. – 1104 с.: ил. - Текст: непосредственный.
17. Романов, Д. Е. Нейронные сети обратного распространения ошибки / Д. Е. Романов // Инженерный вестник Дона. – 2009. - №3. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2009/143

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

ЭЛЕКТРОННОЕ УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

© Северо-Кавказский социальный институт, 2020

Юридический адрес: 355012, г.Ставрополь, ул.Голенева, 59а

Почтовый адрес: 355012, г.Ставрополь, ул.Голенева, 59а

ЭЛЕКТРОННОЕ ИЗДАНИЕ СЕТЕВОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ